

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

2 – 4 октября 2018 г.

Тезисы докладов

Издательский Дом Томского государственного университета

2018

УДК 519.6;517.9;681.3;523.165

ББК 22.1

Президиум конференции:

Майер Г.В., президент ТГУ, д.ф.-м.н., профессор (председатель);
Веснин А.Ю., директор НОМЦ ТГУ, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН (сопредседатель);
Старченко А.В., декан ММФ ТГУ, д.ф.-м.н., профессор (сопредседатель);

Программный комитет конференции:

Тайманов И.А., д.ф.-м.н., академик РАН, заведующий лабораторией Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН;

Козлов К.Л., профессор МГУ, д.ф.-м.н.;

Левчук В.М., зав. каф. алгебры и математической логики СФУ, профессор, д.ф.-м.н.;

Leiderman A., PhD, Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel;

Гришин А.М., профессор кафедры ФизМ ТГУ, профессор, д.ф.-м.н.;

Пергаменщиков С.М., профессор математики университета Руана, д.ф.-м.н.;

Глазунов А.А., директор НИИ прикладной математики и механики ТГУ, д.ф.-м.н.;

Перминов В.А. профессор кафедры экологии и безопасности жизнедеятельности Института неразрушающего контроля ТПУ, д.ф.-м.н.;

Белов В.В., зав. лаб. распространения оптических сигналов ИОА СО РАН, д.ф.-м.н.;

Толстых М.А., в. н. с. ИВМ РАН, д.ф.-м.н.;

Мальшкин В.Э., зав. отделом ИВМиМГ СО РАН, профессор, д.т.н.;

Чубаров Л.Б., г. н. с. ИВТ СО РАН, профессор, д.ф.-м.н.;

Nuterman R. PhD, Research coordinator, Faculty of Science, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, Denmark;

Гельфман Э. Г., руководитель межвузовского центра по проблемам интеллектуального развития личности, д. п. н., профессор;

Шрагер Э.Р., декан ФТФ ТГУ, д.т.н., профессор;

Бордовицына Т.В., профессор ТГУ, д.ф.-м.н.

В60 Всероссийская конференция по математике и механике, посвящённая 140-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета : сборник тезисов (Томск, 2-4 октября 2018 г.) – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. – 136 с.
ISBN 978–5–94621–742–2

В сборник включены тезисы докладов, принятые программным комитетом для участия во Всероссийской конференции по математике и механике.

Ответственность за содержание и оформление текста несут авторы.

УДК 519.6;517.9;681.3;523.165

ББК 22.1

*Конференция организована при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-20084 Г)*

© Томский государственный университет, 2018

© Авторы статей, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Секция «Алгебра и математическая логика»	8
Kumar M. Schur multiplier of central product of groups	8
Крылов П.А. Аддитивные задачи в кольцах	8
Чехлов А.Р. Абелевы группы с инвариантными мономорфизмами.....	9
Васильева Т.И. Обобщенные проекторы конечных групп	10
Галанова Н.Ю. Исследование вещественно замкнутых полей методами теории сечений	11
Марченко Л.Н., Подгорная В.В. К вопросу изоморфизма графов	12
Мисяков В.М. О π -регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы... ..	13
Murashka V.I. Finite groups with F-subnormal extreme subgroups.....	14
Васильев А.Ф., Мельченко А.Г. Конечные группы с сильно K - \mathcal{F} -субнормальными силовскими подгруппами.....	15
Гриншпон И.Э., Гриншпон С.Я. Векторные группы, определяющиеся своим голоморфом.....	16
Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве $K_3(G)$ в некоторых конечных группах.....	18
Балычев С.В., Васильев А.Ф., Васильева Т.И. Конечные группы с факторизацией Холла	19
Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Инволюции двумерной линейной группы	21
Норбосамбуев Ц.Д. Один класс хороших формальных матриц	22
Павлова Т.В. Об ассоциативных кольцах с отщепляемым полным радикалом	23
Фуксон С.Л., Тимошенко Е.А. Ортогональность и параллельность в абелевых группах.....	24
Кравцова О.В. О проблеме разрешимости полной группы коллинеаций конечной полуполевого плоскости	25
Могильных И.Ю. О регулярных подгруппах группы автоморфизмов кода Адамара длины 15	26
Зотов И.Н. Изоморфизмы и элементарная эквивалентность нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов.....	28
Бокарев Н.Л., Буякова Е.В. Диофантовы уравнения второй степени от трёх и более переменных	29
Секция «Вычислительная математика и компьютерное моделирование»	31
Бейзель С.А., Гусев О.И., Кихтенко В.А., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Методы математического моделирования в задачах снижения ущерба от морских катастрофических волн.....	31
Борисов В.Г., Захаров Ю.Н., Шокин Ю.И., Овчаренко Е.А., Клышников К.Ю., Сизова И.Н., Батрагин А.В., Кудрявцева Ю.А., Онищенко П.С. Численное моделирование течения крови в полном анастомозе	32
Старченко А.В., Барт А.А., Кижнер Л.И. Негидростатическая мезомасштабная метеорологическая модель TSU-NM3 и ее применение для краткосрочного прогнозирования выпадения осадков в условиях западной Сибири.....	33
Шумилов Б.М. Об устойчивости мультивейвлетов, ортогональных многочленам	34
Шумилов Б.М. В обоснование «одноточечного» метода внешней калибровки камеры смартфон.....	35
Григорьева И.В., Колпинский Г.И., Тоцкий А.А., Сечкарев А.Б., Вьюнник Н.М. Полуавтоматическая генерация трехмерной индивидуализированной модели позвоночника по рентгеновским снимкам	36

Гусев О.И., Хакимзянов Г.С. Численный алгоритм для полностью нелинейной дисперсионной модели мелкой воды: анализ свойств и применение в задачах о поверхностных волнах.....	37
Данилкин Е.А., Грудович Л.Е. Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта.....	38
Чуруксаева В.В., Старченко А.В. Численное моделирование подтопления поймы р. Томь во время весеннего ледохода.....	39
Зюзьков В.М. Итерации функции Эйлера и функции, определяющей число делителей.....	40
Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы пространственной области в случае плоских задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода.....	41
Иванов К.С., Яшин М.Е. О постановке граничных условий при решении задач гидродинамики.....	42
Кудрявцев В.А., Рычков С.Л., Шатров А.В. Математическая модель мониторинга и управления процессом биологической очистки сточных вод.....	43
Фомин А.А., Фомина Л.Н. Применение неявного итерационного полинейного рекуррентного метода при решении систем разностных уравнений повышенного порядка аппроксимации.....	44
Чиглинцева А.С. К теории образования гидрата в снежном слое при нагнетании газа.....	45
Эшаров Э.А., Макаров А.А. О ресурсоёмкости сплайн-вейвлетных алгоритмов.....	46
Шельмина Е.А. Исследование производительности современных СУБД.....	47
Мацкевич Н.А., Чубаров Л.Б. Точные решения задачи о колебании свободной поверхности в модельной акватории и их применение для верификации численных алгоритмов наката волн на берег.....	48
Смирнова Е. Динамика вихрей, управляемая пиннинг центрами в Nb сверхпроводящих открытых микротрубках.....	49
Смолин А.Ю., Коростелев С.Ю., Шаломеева А.А. Многоуровневое моделирование керамики с различной структурой пористого пространства методом подвижных клеточных автоматов.....	50
Gerasimova Y.A., Shumilov V.M. Image processing with Shearlets.....	51
Давыдов А.С., Михайлов М.Д. Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема.....	51
Lavrentiev N.A., Fazliev A.Z. Systematization of published research plots in the domain of weakly bounded complexes spectroscopy.....	52
Левченко Е.А. Моделирование сверхпроводящих планарных наноструктур методом конечных разностей.....	53
Лихоманова П.А. Индуцированное сверхпроводящими вихрями напряжение в открытых наноструктурированных микротрубках.....	54
Потоцкая А.А. Методы шумоподавления с помощью Shearlets.....	55
Бердун В.Н., Сайнакова И.С. О кардинальных сплайнах вейвлетов.....	55
Семёнов Е.В. Оптимизация нейронной сети для решения обратной задачи электроимпедансной томографии.....	56
Секция «Геометрия и её приложения».....	58
Веснин А.Ю. Неевклидовы фуллерены, их инварианты и группы отражений.....	58
Миронов А.Е. Угловой бильярд и гипотеза Биркгофа.....	58
Madeti P. Two-variable polynomial invariants of virtual knots arising from flat virtual knot invariants.....	59
Gongopadhyay K. Conjugation orbits of semisimple pairs in rank one.....	59

Kozlovskaya T.A. Branched cyclic coverings of connected sums of lens spaces.....	60
Abrosimov N., Vuong B. Volume of a compact hyperbolic antiprism.....	61
Kaur K., Madeti P. Twist number for welded knots.....	61
Gill A.S. Arc shift number and gordian complex of virtual knots.....	61
Смоленцев Н.К. Левоинвариантные почти пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли.....	62
Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х. Существование неподвижных прямых частичного отображения евклидова пространства E_5	63
Даурцева Н.А. О почти комплексных структурах на $S^2 \times S^4$	64
Ким В.Б. Об одном классе многообразий квадратичных элементов.....	65
Кыров В.А. Кратно транзитивные группы преобразований как феноменологически симметричные геометрии.....	66
Щёголева А.А. Геометрическое моделирование гипоидной передачи.....	67
Богданова Р.А. К вопросу о функциональных уравнениях на множество движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности.....	68
Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ и топология».....	71
Абдурасулзода Д., Губин В.Н. Комбинированные оценки функции надежности.....	71
Асанбеков У.К. Теорема об оценке для отображений с s -усредненной характеристикой и Q -отображения.....	72
Бердалиева М.А. Полунепрерывность снизу отображений с s -усредненной характеристикой.....	73
Гензе Л.В. Свободные n -периодические топологические.....	74
Гулько С.П., Каргин Д.И., Хмылева Т.Е. О классификации пространств непрерывных функций на счетных метрических пространствах в топологии поточечной сходимости.....	75
Гулько С.П., Тыдыков К.А. Спектр частот Σ -оболочки двух точек.....	76
Емельянова Т.В., Зиновьева О.С. О последовательном оценивании авторегрессионных процессов.....	77
Емельянова Т.В., Шерстобитова А.О. Непараметрический метод сегментации временных рядов.....	77
Игнаев Э.Л., Хмылева Т.Е. О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций, заданных на разреженных компактах с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах.....	78
Колесников И.А. Акцессорные параметры в дифференциальном уравнении Шварца.....	79
Королев Д.И. Компакты в пространствах $C_p(K, S)$	80
Корытов И.В. Представление линейного периодического функционала в пространстве Соболева.....	81
Лазарев В.Р. Функционалы с конечным носителем на θ -достаточных семействах функций.....	82
Лазарева Е.Г. Построение элементов области сумм ряда на основе направлений расходимости.....	83
Малютина А.Н., Алипова К.А. Некоторые дифференциальные свойства экстремального пространственного негомеоморфного отображения с s -усредненной характеристикой.....	84
Мусаев Т.О. Топологические пространства функций с разреженно-открытой топологией.....	85

Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А. Граничная задача для уравнения гиперболического типа	86
Новик А.В., Малютина А.Н. Первая теорема об искажении модулей при отображениях с s -усредненной характеристикой	87
Островик М.О. Свободное липшицево пространство $F(l_\infty)$	88
Повзун М.А., Пчелинцев Е.А. Улучшенное оценивание функции регрессии с шумами Леви по неполным данным	89
Пчелинцев В.А. Оценки собственных чисел p -Лапласиана для краевой задачи Неймана в невыпуклых областях	90
Садритдинова Г.Д. Задача об экстремальных управлениях некоторого функционала	91
Соколов Б.В. О граничном поведении монотонных отображений класса $L_n^1(B^n)$	91
Сухачева Е.С. О функциях первого класса Бэра на стрелке и ее модификациях	92
Сухачева Е.С., Федоров А.А. Компактификации прямой Зоргенфрея	93
Трофименко Н.Н. Общий вид функционалов на пространствах $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S \times [1, \alpha])$	94
Хабарова Е.Л. Интеграл Кристоффеля-Шварца на классах отображений с симметрией переноса	95
Секция «Методика преподавания математики, механики и информатики»	97
Гриншпон Я.С. Специфика и особенности обучения магистров-учителей математики	97
Дятлов В.Н. Об акцентировании в учебных материалах	98
Лазарева Е.Г., Новикова Н.В. Статистические методы исследования динамики учебных достижений школьников	99
Лапатин А.Л. Изучение позиционных систем счисления в школе	100
Баркович О.А. Организация самостоятельной работы студентов в мини-группах при обучении алгебре	101
Галанова Н.Ю., Хорошкова Е.В. «Множество» во внеурочной деятельности 5-6 классов	102
Бумагина Е.А. Методика формирования структуры тестовых заданий по математике для основной школы	103
Секция «Современные задачи механики»	105
Демин В.А. Особенности конвективных течений сложных по составу жидкостей в тонких полостях	105
Перминов В.А. Математическое моделирование природных пожаров	106
Касымов Д.П., Агафонцев М.В., Мартынов П.С., Перминов В.В. Детектирование методом ИК-диагностики теплонапряженных участков на поверхности древесных строительных материалов, подверженных тепловому воздействию от модельных источников зажигания	107
Касымов Д.П. О некоторых разработках средств локализации и тушения природных пожаров в целях охраны лесных экосистем	108
Кривошеина М.Н., Туч Е.В., Майер Я.В. Исследование распространения волн в монокристаллах жаропрочных никелевых сплавов	109
Кривошеина М.Н., Туч Е.В., Негматов М.М. Деформирование и разрушение полимерных композитов, армированных стекловолокном	110
Бошенятов Б.В., Жильцов К.Н. Исследование вихревого механизма подавления волн цунами подводными преградами	112

Мисюра С.Я., Морозов В.С. Роль конвекции при взаимодействии капель	113
Столповский М.В., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К. Численное решение задачи об инъекции жидкой двуокиси углерода в метаногидратный пласт в осесимметричной постановке	115
Шатров А.В. Метод паде-аппроксимант для соединения асимптотик на примере задачи обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком газа	116
Агафонцев М.В., Лобода Е.Л., Рейно В.В. Исследование структуры течения в пламени при диффузионном горении некоторых видов топлив с применением методов термографии и PIV	117
Астанина М.С., Шерemet М.А. Моделирование режимов естественной конвекции в замкнутой частично пористой полости, заполненной жидкостью с переменной вязкостью	118
Бондарева Н.С., Шерemet М.А. Влияние угла наклона полости на конвективные режимы плавления материала в условиях охлаждения тепловыделяющего элемента	119
Бондаренко Д.С., Шерemet М.А. Естественная конвекция степенной жидкости в полости с тепловыделяющим источником энергии	120
Веремейчик А.И. Решение плоской задачи термоупругости во внешней и внутренней многосвязной областях методом потенциала	121
Гибанов Н.С., Шерemet М.А. Математическое моделирование сопряженного конвективно-радиационного теплообмена в замкнутой полости с локальным источником объемного тепловыделения	122
Демин В.А., Мизев А.И., Петухов М.И., Шмыров А.В. Локализация компонентов металлических расплавов в тигле	123
Мирошниченко И.В., Шерemet М.А. Турбулентные режимы конвективно-радиационного теплообмена в замкнутой полости при наличии локального источника объемного тепловыделения	124
Михайленко С.А., Шерemet М.А. Нестационарные режимы конвективного теплопереноса во вращающейся полости при наличии источника энергии и пористой вставки	125
Брацун Д.А., Демин В.А., Мизев А.И., Петухов М.И., Шмыров А.В. Динамика нерастворимого сурфактанта в ячейке Хеле – Шоу при неоднородном нагреве сверху	126
Стребкова Е.А., Кривошеина М.Н. Независящие от системы отсчета производные в двумерных задачах деформирования: растяжения/сжатия или чистого сдвига на примере алюминиевого сплава Д16	127
Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическое моделирование зажигания металлизированного твердого ракетного топлива импульсом лазерного излучения	128
Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории нелинейной динамики физических маятников	129
Зимин В. П., Ефимов К.Н., Овчинников В.А., Якимов А.С. Моделирование активной термомиссионной тепловой защиты при конвективном нагреве	130
Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В. Динамическое состояние пластической фазы фуллерита	131
Федоров Р.В., Матвиенко О.В. Течение жидкости Сиско в цилиндрической трубе	132
Гольдин В.Д., Зинченко В.И. Нестационарный теплообмен при сверхзвуковом обтекании затупленных тел в широком диапазоне чисел Рейнольдса	133
Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Уколов А.В., Лебедев А.В. Математическая модель проницаемости углеродного нанополотна	134

Секция «Алгебра и математическая логика»

Schur multiplier of central product of groups

Kumar M.

Harish-Chandra Research Institute

Let G be a central product of two groups H and K . Lower bound on the order the Schur multiplier of G was given by J. Wiegold in 1971 [2], in case G is finite. Such a bound for arbitrary groups was provided by B. Eckman, P. J. Hilton and U. Stammbach in 1973 [1].

In this talk, I'll discuss about lower and upper bounds on the order of the second cohomology group of G , having coefficients in an abelian divisible group D with trivial action, in terms of the second cohomology groups of certain quotients of H and K . In particular, I'll present a refinement of the existing bounds, obtained in [1, 2], on the Schur multiplier of G in terms of the Schur multipliers of certain quotients of H and K . This talk is based on joint work with L. R. Vermani and Sumana Hatui.

References

1. Eckmann, B., Hilton, P. J. and Stammbach, U. On the Schur multiplier of a central quotient of a direct product of groups, *J. Pure Appl. Algebra* **3** (1973), 73-82.
2. Wiegold, J. Some groups with non-trivial multipliers, *Math. Z.* **120** (1971), 307-308.

Аддитивные задачи в кольцах

Крылов П.А.

Томский государственный университет

Интерес к вопросу о том, каким образом обратимые элементы кольца могут порождать его аддитивно, восходит к середине XX века. Вольфсон и Зелинский независимо доказали, что всякий оператор векторного пространства V над телом D является суммой двух обратимых операторов, за исключением очевидного случая, когда V есть поле из двух элементов.

В связи с этим результатом Скорняков сформулировал такой вопрос: «Нельзя ли каждый элемент регулярного кольца представить в виде суммы элементов, обладающих обратными?» ([1], проблема 31). Этот вопрос инициировал ряд статей.

Отличная и, по видимому, независимая линия исследования хороших колец появилась в 1963 г. после того, как Фукс сформулировал вопрос: «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают (аддитивно) её кольцо эндоморфизмов?»

Некоторые результаты и обзор исследований аддитивных задач в кольцах представлены в книге [2] и статье [3].

Автор тезисов вернулся к своей старой статье [4], существенно усилил основной её результат и нашел более прозрачное его доказательство. Именно, теорема 1.1 из [4] доказана для прямых сумм любого числа модулей и для любого $n > 1$. Даны применения к прямым суммам копий произвольного модуля.

Список литературы

1. Скорняков Л.А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. Москва, 1961.
2. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. Москва. МЦНМО, 2017.
3. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Царёв А.В. sp -Группы и их кольца эндоморфизмов (в печати).
4. Крылов П.А. Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов// Известия вузов. Математика. 1976. №4. С. 56-66.

Абелевы группы с инвариантными мономорфизмами

Чехлов А.Р.

Томский государственный университет

Будем говорить, что группа A обладает R -свойством (соответственно, L -свойством), если для любых ее мономорфизма α и эпиморфизма β найдется такой $\gamma \in E(A)$, что $\beta\alpha = \alpha\gamma$ (соответственно, $\alpha\beta = \gamma\alpha$).

Теорема 1. Пусть G – группа, у которой мономорфизмы и эпиморфизмы взаимно перестановочны. Тогда ее кольцо эндоморфизмов нормально.

Следствие 2. В периодической группе мономорфизмы и эпиморфизмы взаимно перестановочны тогда и только тогда, когда ее кольцо эндоморфизмов коммутативно, т.е. каждая r -компонента группы является коциклической.

Теорема 3. Пусть $A = D \oplus G$, где $D \neq 0$ – делимая часть группы A , причем у группы G нет ненулевых делимых гомоморфных образцов, содержащихся в группе D .

1) Если у группы D часть без кручения, а также каждая r -компонента имеют конечный ранг, то группа A обладает L -свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает группа G .

2) Группа A обладает R -свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы D и G .

Теорема 4. Если A – редуцированная группа без кручения с L - или R -свойством, то ее кольцо эндоморфизмов является нормальным.

Описаны делимые группы, а также прямые суммы циклических групп с R - или L -свойством. Так, доказано следующее

Предложение 5. Для делимой группы D эквивалентны следующие условия:

- 1) она обладает R -свойством;
- 2) все ее мономорфизмы являются автоморфизмами;
- 3) ее часть без кручения, а также каждая r -компонента имеют конечный ранг.

Обобщенные проекторы конечных групп

Васильева Т.И.

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины

Рассматриваются только конечные группы. Пусть ω – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел, \mathcal{F} – непустой класс групп. Согласно [1] подгруппа H группы G называется \mathcal{F}^ω -проектором в G , если HN/N является \mathcal{F} -максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω -подгруппы N группы G .

Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то \mathcal{F}^ω -проектор группы G является ее \mathcal{F} -проектором. Обратное утверждение в общем случае не выполняется. Хуппертом в 1968 году было доказано, что если \mathcal{F} – насыщенная формация, то всякий \mathcal{F} -проектор H разрешимой группы G обладает следующим свойством: $H \cap N_1N_2 = (H \cap N_1)(H \cap N_2)$ для любых нормальных в G подгрупп N_1 и N_2 .

Нам потребуются некоторые понятия из [1]. Если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$, \mathcal{X} – класс групп, то \mathcal{F} называется: 1) ω -насыщенным в \mathcal{X} , если для любой группы $G \in \mathcal{X}$ и любой нормальной подгруппы N из G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathcal{F}$ следует $G \in \mathcal{F}$; 2) ωP -гомоморфом в \mathcal{X} ,

если \mathcal{F} – гомоморф такой, что для любой группы $G \in \mathcal{X}$ и любой ее максимальной подгруппы M из $G/\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathcal{F}$ следует $G \in \mathcal{F}$.

В настоящем сообщении установлены свойства \mathcal{F}^ω -проекторов, связанные с нормальными подгруппами группы. Гомоморф \mathcal{F} будем называть ω -формацией, если для любых нормальных ω -подгрупп N_1 и N_2 группы G из $G/N_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, всегда следует $G/N_1 \cap N_2 \in \mathcal{F}$.

Теорема. Пусть \mathcal{X} – наследственная формация, \mathcal{F} – ω P-гомоморф в \mathcal{X} . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $H \cap N_1 N_2 = (H \cap N_1)(H \cap N_2)$ для любого \mathcal{F}^ω -проектора H группы $G \in \mathcal{X}$ и любых нормальных в G подгрупп N_1 и N_2 ;
- 2) \mathcal{F} – ω -насыщенная в \mathcal{X} ω -формация.

Если ω – множество всех простых чисел, то в случае совпадения \mathcal{X} с классом всех разрешимых групп отсюда получается результат Хупперта-Ти Ена [2, IV.5.3], а в случае совпадения \mathcal{X} с классом всех групп получается соответствующий результат их [3].

Список литературы

1. Ведерников В.А., Сорокина М.М. \mathcal{F} -проекторы и \mathcal{F} -покрывающие подгруппы конечных групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 6. С. 1224-1239.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 898 p.
3. Förster P. Subnormal subgroups and formation projectors // J. Austral. Math. Soc. (Series A). 1987. V. 42. P. 31-47.

Исследование вещественно замкнутых полей методами теории сечений

Галанова Н.Ю.

Томский государственный университет

Чтобы установить изоморфизм вещественно замкнутых неархимедовых полей используют различные классификации сечений. Рассмотрим связь между классификациями сечений, введёнными Пестовым [1] и Шелахом (S. Shelah) [2]. Сечение (A, B) упорядоченного поля K называется *симметричным (по Пестову)*, если $\forall a \in A \exists a_1 \in A (a_1 + (a_1 - a) \in B)$ и $\forall b \in B \exists b_1 \in B (b_1 - (b - b_1) \in A)$ [1] и называется *симметричным (по Шелаху)*, если $cf(A) = coi(B)$ [2].

Теорема 1. Каждое сечение, симметричное по Пестову, симметрично и по Шелаху, обратное неверно.

Говорят, что *многочлен $f(x)$ меняет знак на сечении (A, B)* упорядоченного поля K , если $\exists a \in A \exists b \in B$ такие, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (положителен). Если существует многочлен из $K[x]$, меняющий знак на сечении, то это сечение называется *алгебраическим (по Пестову)* [1]. Сечение (A, B) упорядоченного поля K называется *алгебраическим (по Шелаху)*, если существуют упорядоченное расширение F поля K и элемент $x \in F \setminus K$, порождающий данное сечение (A, B) , причем x является алгебраическим элементом над K [2].

Теорема 2. Сечение упорядоченного поля алгебраическое по Пестову тогда и только тогда, когда оно алгебраическое по Шелаху.

Список литературы

1. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // СМЖ. 2001. Т. 42. № 6. С. 1213–1456.
2. Shelah S. Quite complete real closed fields // Israel Journal of Mathematics. 2004. V.142. P. 261–272.

К вопросу изоморфизма графов

Марченко Л.Н., Подгорная В.В.

*Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины*

Рассматриваем неориентированные графы без кратных ребер и петель. Графы изоморфны, если существует биекция между вершинами, сохраняющая смежность соответствующих вершин. Известно, что для изоморфных графов все числовые характеристики (инварианты) совпадают [1]. Основными инвариантами графа являются число вершин и ребер графа, вектор локальных степеней вершин, число компонент связности. Также в качестве инвариантов используются число вершин наибольшего полного подграфа (плотность графа), наибольшее число попарно несмежных вершин графа (неплотность), хроматическое число графа, количество вершин наибольшего полного графа, к которому стягивается заданный граф

(число Хадвигера). Все указанные характеристики определяются по исходному графу, однако граф по перечисленным характеристикам не всегда однозначно восстанавливается.

Известны контрпримеры, показывающие, что равенство указанных характеристик не является достаточным условием изоморфизма графов. При использовании совокупности инвариантов удается установить изоморфизм некоторых классов графов [2]. Изоморфизм произвольных графов устанавливается с помощью матриц смежности. Для установления изоморфизма наиболее целесообразно привести матрицы смежности графов к блочно-диагональному виду [3].

В работе предлагается способ определения изоморфизма связанных графов по их произвольным остовам, при этом возможно установить соответствующую биекцию между вершинами графов.

Список литературы

1. Пономаренко И.Н. Проблема изоморфизма графов: Алгоритмические аспекты (записки к лекциям). – Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова, 2010. 57 с.
2. Карелин В.П. Задача распознавания изоморфизма графов. Прикладное значение и подходы к решению / Вестник Таганрогского института управления и экономики, 2015. № 1. – С. 102-106.
3. Носов В.И., Бернштейн Т.В., Носкова Н.В., Храмова Т.В. Элементы теории графов. Учебное пособие. – Новосибирск, 2008. – 107 с.

О π -регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы

Мисяков В.М.

Томский государственный университет

Данные тезисы связаны с одним из вопросов, поставленных в [1; проблема 16]: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». Напомним, что кольцо R называется регулярным (π -регулярным), если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $u \in R$ такой, что $xux = x$ ($x^m u x^m = x^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, зависящего от x).

Все группы, встречающиеся в работе, абелевы. Введём следующие обозначения: $T(X)$ – периодическая часть группы X ; $T_p(X)$ – p -компонента $T(X)$; $E(X)$ – кольцо эндоморфизмов группы X ; $C(R)$ – центр кольца R .

Теорема 1. Для группы G справедливы следующие условия:

- 1) если G – нередуцированная группа, то $C(E(G))$ – π -регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет одному из следующих условий:
- G – делимая группа;
 - $G = T(G) \oplus D$, где D – делимая группа без кручения, причём существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что p^m служит наименьшей верхней гранью порядков элементов $T_p(G)$ для всякого $p \in P(G)$;
- 2) если G – редуцированная группа, то $C(E(G))$ – π -регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:
- $G/T(G)$ – делимая группа;
 - группа G изоморфна подгруппе группы $\prod_{p \in P(G)} T_p(G)$;
 - существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что p^m служит наименьше верхней гранью порядков элементов $T_p(G)$ для всякого $p \in P(G)$;
 - $C(E(G))$ изоморфно π -регулярно разрешимому подкольцу кольца $C(E(T(G)))$.

Список литературы

1. Крылов П. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 464 с.

Finite groups with \mathbf{F} -subnormal extreme subgroups

Murashka V.I.

Francisk Skorina Gomel State University

All groups considered here are finite. Let \mathbf{F} be a formation of finite groups. We use $G^{\mathbf{F}}$ to denote the \mathbf{F} -residual of G , i.e. the least normal subgroup of G such that $G/G^{\mathbf{F}}$ is an \mathbf{F} -group. Recall that a subgroup H of a group G is called \mathbf{F} -subnormal if either $H = G$ or there exists a maximal chain of subgroups $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ such that $H_i^{\mathbf{F}}$ is a subgroup of H_{i-1} for every $i = 1, \dots, n$.

Classes of groups with given systems of \mathbf{F} -subnormal subgroups are studied in many papers (for example see [1-4]).

A class of groups \mathbf{X} is called extreme [5] if it is a saturated homomorph and if G/K is an \mathbf{X} -group, where K is an unique minimal normal subgroup of G , then G is an \mathbf{X} -group. For example the class of all soluble groups is extreme. Extreme classes of groups play an important role in the structural study of soluble groups (see [5]).

Note that every extreme class contains unit group and the intersec-

tion of some collection of extreme classes is again extreme class. That is why there exists the least (by inclusion) extreme class. The groups from this class are called extreme. It is clear that simple, cyclic primary and Schmidt groups are extreme. We obtained the following result

Theorem. *Let \mathbf{F} be a hereditary saturated formation. Then the class $e\mathbf{F}$ of groups, all whose extreme subgroups are \mathbf{F} -subnormal, is a hereditary saturated formation which coincides with the class of groups whose every extreme subgroup is an \mathbf{F} -group.*

References

1. Semenchuk V. N. Characterization of Classes of Finite Groups with the Use of Generalized Subnormal Sylow Subgroups / V. N. Semenchuk, S. N. Shevchuk // *Math. Notes*. 2011. V. 89. № 1. P. 117–120.
2. Vasil'ev A. F. Finite groups with generalized subnormal embedding of Sylow subgroups / A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva, A. S. Vegeera // *Siberian Math. J.* 2016. V. 57. № 2. P. 200–212.
3. Murashka V. I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups / V. I. Murashka // *Siberian Math. J.* 2014. V. 55. № 6. P. 1105–1115.
4. Monakhov V. S. Finite groups with formation subnormal primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // *Siberian Math. J.* 2017. V. 58. №4. P. 663–671.
5. Carter R. Extreme classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // *J. Algebra*. 1968. V. 9. № 3. P. 285–313.

Конечные группы с сильно $K-\mathcal{F}$ -субнормальными силловскими подгруппами

Васильев А.Ф., Мельченко А.Г.

*Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины*

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа G тогда и только тогда нильпотентна, когда ее силловские подгруппы нормальны (субнормальны) в G . Естественным обобщением субнормальности являются следующие понятия.

Пусть \mathcal{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется: 1) \mathcal{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathcal{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$; 2) $K-\mathcal{F}$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i^{\mathcal{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

В работах [2-4] изучались группы с \mathcal{F} -субнормальными (K - \mathcal{F} -субнормальными) силовскими подгруппами.

Определение. Пусть \mathcal{F} – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем *сильно K - \mathcal{F} -субнормальной* в G , если $N_G(H)$ является \mathcal{F} -субнормальной подгруппой в G .

Так как подгруппа нормальна в своем нормализаторе, то всякая сильно K - \mathcal{F} -субнормальная подгруппа будет K - \mathcal{F} -субнормальной. Обратное утверждение неверно.

Теорема. Пусть \mathcal{F} – насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит \mathcal{F} , когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathcal{F})$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K - \mathcal{F} -субнормальна в G .

Следствие [5]. Пусть \mathcal{U} – формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно K - \mathcal{U} -субнормальна в G , то G сверхразрешима.

Список литературы

1. Ballester-Bolinchas A., Ezquerro L.M. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006. 385 p.
2. Васильев А.Ф. О влиянии примарных \mathcal{F} -субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. № 8. С. 31-39.
3. Васильев А.Ф., Васильева Т.И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4. С. 86-91.
4. Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Вегера А.С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 259-275.
5. Kniashina V., Monakhov V. On supersolubility of finite groups with \mathbf{P} -subnormal subgroups. International Journal of Group Theory. 2013. V.2. № 4. P. 21-29.

Векторные группы, определяющиеся своим голоморфом

Гриншпон И.Э.¹, Гриншпон С.Я.²

¹Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

²Томский государственный университет

Пусть G – абелева группа, $\Gamma(G)$ – ее голоморф. Группы с изоморфными голоморфами называются *голоморфно изоморфными*.

Группа G определяется своим голоморфом в некотором классе групп \mathfrak{R} , если любая группа H из этого класса, голоморфно изоморфная группе G , изоморфна группе G .

Подгруппа S голоморфа $\Gamma(G)$ называется голоморфно разложимой, если для любого элемента $(g, \varphi) \in S$ следует, что $(g, \varepsilon) \in S$ и $(0, \varphi) \in S$. Разложение $G = A \oplus B$ группы G называется полухарактеристическим, если одна подгруппа A – характеристическая подгруппа группы G , а подгруппа B не характеристическая подгруппа.

Γ -разложением группы G , индуцированным гомоморфизмом голоморфов, называется разложение $G = G_1 \oplus G_2$.

Векторной группой называется прямое произведение групп без кручения ранга 1 ([1, с. 199]) Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$ – редуцированная

векторная группа, мощность которой неизмерима, ее Γ -разложение $G = G_1 \oplus G_2$ и $G_1 = \prod_{\alpha \in I_1} G_\alpha$, $G_2 = \prod_{\beta \in I_2} G_\beta = \prod_{t \in T(G_2)} G_t^t$ ([2]).

Введем следующие обозначения

$$I(t) = \{\beta \in I_2 \mid t(G_\beta) = t\}, \quad I_1' = \{\alpha \in I_1 \mid \text{Hom}(G_2, G_\alpha) \neq 0\},$$

$$T(\alpha) = \{t \in T(G_2) \mid t \leq t(G_\alpha)\}.$$

Теорема 1. Пусть \mathfrak{R} – класс всех векторных групп. Для любого нетривиального Γ -разложения $G = G_1 \oplus G_2$ справедливы условия:

1) $|I(t)| < \aleph_0$ для всех типов $t \in T(G_2)$;

2) $|T(\alpha)| < \aleph_0$ для всех индексов $\alpha \in I_1$. ♦

Теорема 2. Группа G из класса векторных групп \mathfrak{R} определяется своим голоморфом в классе \mathfrak{R} , если для любого полухарактеристического разложения $G = G_1 \oplus G_2$ выполняется условие $|I_1'| \neq 1$. ♦

Теорема 3. Пусть \mathfrak{R} – класс всех векторных групп и пусть для любого полухарактеристического разложения $G = G_1 \oplus G_2$ выполняется условие $|I_1'| = 1$. Группа G из класса \mathfrak{R} определяется своим голоморфом в классе \mathfrak{R} , если группы G_α и G_2 удовлетворяют одному из условий: 1) $|I_2| \geq \aleph_0$; 2) $|I_2| < \aleph_0$ и группы G_α и G_2 не являются одновременно π -делимыми; 3) $|I_2| < \aleph_0$, группы G_α и G_2 π -делимы, для любого $\beta \in I_2$ существует такое $j \in I_2$, что $t_0 - t(G_\beta) = t(G_j)$ и $r_G(t(G_\beta)) = r_G(t(G_j))$, где $r_G(\tau)$ мощность множества всех прямых слагаемых типа τ , входящих в прямое разложение группы G . ♦

Список литературы

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977. 416 С.

О множестве $K_3(G)$ в некоторых конечных группах

Забарина А.И., Фомина Е.А.

Томский государственный педагогический университет

Известно [1], что при доказательстве классификационной теоремы конечных простых групп важную роль сыграло использование свойств централизатора инволюций.

В [2] изучены некоторые свойства конечных групп, каждая инволюция которых перестановочна ровно с двумя элементами группы.

Рассмотрим такие элементы конечных групп, каждый из которых перестановочен ровно с тремя элементами группы.

Пусть G – произвольная конечная группа порядка n . Обозначим через $K_3(G)$ множество: $\{x \in G \mid x \neq e, |C_G(x)| = 3\}$.

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. Если $K_3(G)$ не пусто, то $n : 3 \wedge n \not\equiv 9 \wedge (K_3(G) \cap T(G) = \{x \in G \mid o(x) = 3\})$.

Предложение 2. Множество $K_3(G)$ является инвариантным подмножеством G .

Предложение 3. Пусть $K_3(G) \neq \emptyset$. Тогда $|K_3(G)| \in \left\{ \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} \right\}$.

Предложение 4. Если порядок G нечётен, то либо $K_3(G)$ пусто, либо $|K_3(G)| = \frac{2n}{3}$.

Предложение 5. 1) $K_3(S_n) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \in \{3, 4\}$.

2) $K_3(A_n) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \in \{3, 4, 5\}$.

Предложение 6. $K_3(D_{2n}) = \emptyset$ для всех $n > 3$.

Теорема 7. Пусть G – конечная нильпотентная группа, $|G| = 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$. Тогда $K_3(G) = \emptyset$.

Приведём пример семейства разрешимых групп, в каждой из которых множество $K_3(G)$ не пусто.

Пусть q – простое число, $r \in \mathbf{N}$, причём:

$$q \equiv 1 \pmod{3}, \quad r^3 \equiv 1 \pmod{q}, \quad r \not\equiv 1 \pmod{q}.$$

Положим: $G = \{a^u b^v \mid u \in \{0, 1, 2\}, v \in \overline{0, q-1}\}$. Воспользуемся следующей операцией на G [3, с. 31]:

$$a^{u_1} b^{v_1} a^{u_2} b^{v_2} = a^{u_1+u_2} b^{(v_1 \cdot r^{u_2} + v_2)}.$$

Теорема 8. Для каждого простого $q \equiv 1 \pmod{3}$ в указанной выше группе G множество $K_3(G)$ состоит из $2q$ элементов. Если $q-1 = 3s$, то мощность множества всех её сопряжённых классов равна $s+3$.

Теорема 9. Пусть G – конечная простая группа, $K_3(G) \neq \emptyset$. Тогда все инволюции группы G образуют один класс сопряжённых элементов.

Постановка задачи взята в [4, с. 81].

Порядки всех спорадических простых групп, за исключением группы Янко J_1 , делятся на 3^2 [1, с. 145]. Согласно строению J_1 [1, с. 93], в ней существует инволюция i , перестановочная с некоторым элементом c , таким что $o(c) = 3$. Следовательно, в J_1 существует элемент порядка 6, то есть $K_3(J_1) = \emptyset$. Таким образом, в каждой спорадической группе G множество $K_3(G)$ пусто.

Список литературы

1. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
2. Забарина А. И., Фомина Е. А., Гусельникова У. А. О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 27–32.
3. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1962. 468 с.
- Белоногов В. А., Фомин А. Н. Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.

Конечные группы с факторизацией Холла

Балычев С.В., Васильев А.Ф., Васильева Т.И.

*Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины*

Рассматриваются только конечные группы. В 1937 году Ф. Холл доказал, что группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда G можно представить в произведение своих попарно перестановочных силовских подгрупп.

В настоящей работе мы по аналогии с [1] изучаем свойства факторизаций разрешимых групп, предложенных Ф. Холлом.

Определение. Пусть \mathfrak{F} – наследственный класс групп, t – натуральное число. Класс \mathcal{F} назовем H_t -замкнутым, если \mathcal{F} содержит всякую группу $G=A_1A_2\cdots A_n$ являющуюся произведением своих попарно перестановочных силовских подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , причем любое произведение $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}$ принадлежит классу \mathcal{F} для каждого выбора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq n$.

Теорема. Пусть t – натуральное число, $t \geq 2$, \mathcal{F} – разрешимая наследственная локальная формация и F – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда \mathcal{F} является H_t -замкнутой локальной формацией, когда $F(p)$ – H_t -замкнутая формация, а $F(p) \cap \mathcal{S}_p$ – H_{t-1} -замкнутая формация для любого простого p .

Подгруппа H группы G называется **P-субнормальной** в G [2], если либо $H=G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$. Группа, у которой любая силовская подгруппа является **P-субнормальной**, называется **w-сверхразрешимой**. Класс $w\mathcal{H}$ всех w-сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [2].

Используя теорему и результаты работ [2, 3], получаем

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *формация \mathcal{H} всех сверхразрешимых групп является H_3 -замкнутой, но не является H_2 -замкнутой;*
- 2) *формация $w\mathcal{H}$ является H_2 -замкнутой, но не является H_1 -замкнутой.*

Список литературы

1. Амберг Б., Казарин Л.С., Хефлинг Б. Конечные группы с кратными факторизациями // *Фундамент. и прикл. матем.* 1998. Т. 4. № 4. С. 1251-1263.
2. Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51. № 6. С. 1270-1281.
3. Monakhov V. S., Kniashina V.N. Finite groups with **P**-subnormal subgroups // *Ricerche mat.* 2013. V. 62. № 2. С. 307-322.

Инволюции двумерной линейной группы

Гайдак В.А., Тимошенко Е.А.

Томский государственный университет

Исследуются инволюции линейной группы

$$GL_2(\mathbf{Z}) = \left\{ A \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}; ad - bc = \pm 1 \right\}.$$

Напомним, что элемент g группы G называется:

- *инволюцией*, если g^2 есть нейтральный элемент группы G ;
- *центральным*, если $gh = hg$ при всех $h \in G$.

Предложение 1. *Все нецентральные инволюции группы $GL_2(\mathbf{Z})$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$.*

Предложение 2. *Множество всех центральных элементов группы $GL_2(\mathbf{Z})$ состоит из матриц $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Для инволюций $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Инволюция вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ сопряжена с J тогда и только тогда, когда b и c – четные числа.*

Теорема 2. *Если инволюция вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ сопряжена с I , то хотя бы одно из чисел b и c является нечетным.*

Следствие. *Инволюции J и I не сопряжены в группе $GL_2(\mathbf{Z})$.*

Список литературы

1. Курош А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967.

Один класс хороших формальных матриц

Норбосамбуев Ц.Д.

Томский государственный университет

Элемент кольца называется k -хорошим, если он представим в виде суммы k обратимых элементов этого кольца. Кольцо называется k -хорошим, если все его элементы k -хорошие.

С общей теорией формальных матриц можно познакомиться в книге [3].

В статьях [1, 2] был выделен класс колец формальных матриц (далее – к.ф.м.) над коммутативным кольцом, у которых удалось описать строение группы автоморфизмов. Это достигалось за счет того, что к.ф.м. K над R представляется как расщепляющееся расширение одного своего нильпотентного идеала I с помощью прямой суммы $L = K_1 \oplus \dots \oplus K_m$ колец обычных матриц K_i над R . Значит, всякая матрица A из K может быть записана в виде $A=B+C$, где B из I , а C из L .

Так как идеал I нильпотентен, то матрица A обратима $\leftrightarrow C$ обратима. Таким образом, если все порядки колец K_i больше 1, то по теореме Хенриксена [5] L , а, следовательно, и K – 3-хорошие и 4-хорошие кольца. Однако, если хотя бы одно из колец K_i имеет порядок равный 1, то есть, если в качестве одного из блоков в L мы имеем кольцо R , то тут уже все зависит от того будет ли само R хорошим или нет. Например, известно, что если R – k -хорошее, то и к.ф.м. K – k -хорошее.

Список литературы

1. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц. Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. матем. Журнал. 2018 (принята к печати).
2. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц. Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018 (принята к печати).
3. Krylov P., Tuganbaev A. Formal matrices. Algebra and Applications, Vol. 23. Springer, 2017.
4. Норбосамбуев Ц. Д. Один класс хороших колец формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018 (принята к печати).
5. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. Vol. 31. P. 182–193.

Об ассоциативных кольцах с отщепляемым полным радикалом

Павлова Т.В.

Тюменский государственный университет

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полной (делимой) и редуцированной группы. Л. М. Мартыновым в [1] были определены аналоги этих понятий для произвольных (универсальных) алгебр. Ассоциативное кольцо называется полным, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из атомов решетки многообразий ассоциативных колец. Далее под кольцом понимается ассоциативное кольцо, под идеалом – двусторонний идеал. Кольцо, не имеющее ненулевых полных подколец, в соответствии с [1] называется редуцированным. В силу основного результата работы [2], в любом кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом и отображение $R \rightarrow C(R)$ в абстрактном классе колец является идемпотентным радикалом в смысле Куроша. Идеал $C(R)$ кольца R называется полным радикалом кольца R . Кольцо называем расщепляемым [3], если полный радикал в нем отделяется прямым слагаемым.

Теорема 1. *Коммутативное артиново кольцо, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым кольцом.*

Теорема 2. *Если полный радикал $C(R)$ артинова слева кольца R является наибольшей делимой подгруппой аддитивной группы R^+ и факторкольцо $R/C(R)$ содержит левую (правую) единицу, то полный радикал $C(R)$ выделяется прямым слагаемым в R .*

Список литературы

1. Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Труды международного семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179 – 190.
2. Мартынов Л. М. Об одном радикале алгебр со свойством трансверсальности по минимальным многообразиям // Вест. Ом. ун-та. 2004. № 3. С. 19-21.
3. Мартынов Л. М. Полнота, редуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электр. матем. известия. 2016. Т. 13. С. 181–241.

Ортогональность и параллельность в абелевых группах

Фуксон С.Л., Тимошенко Е.А.

Томский государственный университет

В [1] вводятся понятия ортогональности и параллельности в абелевой группе, которые оказываются вполне естественными, если придать им геометрическую интерпретацию.

Определение 1 [1]. Пусть $(G, +)$ – аддитивная абелева группа, и пусть \perp – бинарное отношение в G , удовлетворяющее следующим аксиомам:

(A1) для каждого $a \in G$ существует $b \in G$ такое, что $a \perp b$;

(A2) для каждого $a \in G \setminus \{0\}$ выполнено $a \not\perp a$;

(A3) для любых $a, b \in G$ из $a \perp b$ следует $b \perp a$;

(A4) для любых $a, b, c \in G$ из $a \perp b$ и $a \perp c$ следует $a \perp (b + c)$;

(A5) для любых $a, b \in G$ из $a \perp b$ следует $a \perp -b$.

Тогда отношение \perp называется *ортогональностью* в G .

Определение 2 [1]. Пусть в группе G задана ортогональность \perp , и пусть $a, b \in G$. Будем говорить, что элементы a и b параллельны, если $u \perp a \Leftrightarrow u \perp b$ при всех $u \in G$.

Теорема 1 [2]. В абелевой группе $\mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$ число всевозможных ортогональностей s_{ort} вычисляется по формуле

$$s_{ort} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \frac{(p+1)!}{2^i (p-2i+1)! i!}.$$

Теорема 2. Число s_{par} всевозможных параллельностей в группе $\mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$, где $p \geq 3$, вычисляется по формуле $s_{par} = 2^p$.

Список литературы

1. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 2013. Article ID 983607.
2. Фуксон С.Л. Ортогональности группы $\mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 46–54.

О проблеме разрешимости полной группы коллинеаций конечной полуполево́й плоскости*

Кравцова О.В.

Сибирский федеральный университет

Проективная плоскость называется *полуполево́й*, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Известна гипотеза [1] о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполево́й недезарговой плоскости конечного порядка (см. также [2], вопрос 11.76, 1990 г.). К настоящему моменту эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполево́вых плоскостей. Как доказано в [1], гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов для недезарговой полуполево́й плоскости редуцируется к разрешимости группы автотопизмов. В предположении неразрешимости полной группы коллинеаций простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Предлагается проверить существование подгруппы H группы автотопизмов, изоморфной знакопеременной группе A_5 либо группе Судзуки $Sz(8)$ (подгруппам значительного количества простых неабелевых групп). В случае нечетного порядка p^n ($p > 2$ простое) построено матричное представление регулярного множества полуполево́й плоскости, допускающей подгруппу автотопизмов $H \cong A_5$. Выделена серия плоскостей, не допускающих A_5 .

Теорема. Полуполево́вая плоскость нечетного порядка p^n ($p > 2$ – простое число), где $p - 1$ делится на 4 или $n = 4$, не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной знакопеременной группе A_5 .

В случаях $H \cong A_5$, $p = 2$, и $H \cong Sz(8)$, $p > 2$, получен ряд технических результатов.

Список литературы

1. Hughes D.R., Piper F.C. Projective planes (Springer–Verlag New–York Inc., 1973).
2. Мазуров В.Д., Хухро Е.И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач (Новосибирск, 2006).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, (проект 16-01-00707).

О регулярных подгруппах группы автоморфизмов кода Адамара длины 15^*

Могильных И.Ю.

*Томский государственный университет,
Институт Математики им. С.Л. Соболева*

Транзитивное действие группы на множестве называется **регулярным**, если стабилизатор каждого элемента множества тривиален. В работе рассмотрены регулярные подгруппы группы автоморфизмов линейного кода Адамара длины $n=2^r-1$, эти подгруппы находятся во взаимнооднозначном соответствии с подгруппами общей аффинной группы $GA(r,2)$ действующими регулярно на векторах r -мерного пространства над $GF(2)$.

Пусть F^n обозначает n -мерным векторным пространством над $GF(2)$, оснащенное метрикой Хэмминга. Известно, что **группа автоморфизмов** F^n (изометрий пространства) есть полупрямое произведение группы Z_2^n и группы подстановок на n координатных позициях. **Группа автоморфизмов кода** (некоторого подмножества векторов) определяется как стабилизатор множества кодовых слов кода группой автоморфизмов пространства. **Пропелинейным** кодом [1], [2] называется код, группа автоморфизмов которых содержит регулярную подгруппу. Такие коды возникли как обобщения линейных кодов, зачастую имеющие более хорошие характеристики чем линейные [3].

Код Адамара определяется как код, дуальный к коду Хэмминга [4] и имеет длину $(2^r - 1, 2^r, 2^{r-1})$. Верно следующее утверждение:

Утверждение. Группа автоморфизмов кода Адамара длины 2^r-1 изоморфна $GA(r,2)$. Регулярные подгруппы группы автоморфизмов кода Адамара находятся во взаимнооднозначном соответствии с регулярными подгруппами $GA(r,2)$ относительно действия на векторах F^r .

Некоторое количество результатов в литературе посвящено исследованию регулярных подгрупп $GA(r,2)$. К примеру, в работе [5] построены регулярные подгруппы без нетривиальных трансляций. В работах [6, 7] отмечается что известно лишь одна бесконечная нетривиальная серия таких подгрупп в абелевом случае, возникающая

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание № 1.12877.2018/12.1)

из централизатора жордановой клетки в группе верхнетреугольных матриц размера $r+1$. Верна следующая теорема.

Теорема. 1. Существует ровно 39 классов сопряженности регулярных подгрупп $GA(4,2)$, разбивающихся на 11 классов изоморфизма.

2. Классы изоморфизма регулярных абелевых подгрупп $GA(4,2)$ исчерпываются следующим списком: $Z_2^4, Z_4^2, Z_8Z_2, Z_2^2Z_4$

3. Диэдральная подгруппа является регулярной подгруппой $GA(r,2)$ лишь в случае $r=3$ и является нерегулярной подгруппой в случае $r=4$.

Теорема была использована для получения нижней оценки числа классов изоморфизма регулярных подгрупп группы автоморфизмов кода Хэмминга длины 15 в работе [8].

Список литературы

1. Phelps K. T., Rifa J. On binary 1-perfect additive codes: some structural properties. IEEE Trans. Inform. Theory. 48, 2002. С. 2587-2592
2. Rifa J., Basart J.M., Huguet L. On completely regular propelinear codes. Proc. 6th Int. Conference, AAEECC-6. LNCS. 357, 1989. С. 341-355
3. Hammons, A. R., Jr, Kumar, P. V., Calderbank, A. R., Sloane, N. J. A., Sole, P. The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. IEEE Trans. Inform. Theory, 1994. 40, 2. С. 301-319
4. F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane. The Theory of Error-Correcting Codes. North-Holland Publishing Company, 1977.
5. P. Hegedus, Regular subgroups of the Affine group. Journal of Algebra. 225, 2000. С.740-742.
6. A. Caranti, F. Dalla Volta and M. Sala, Abelian regular subgroups of the affine group and radical rings, Publicationes mathematicae Debrecen. 69, 2006. С. 297-308.
7. M. Bellani, Some remarks on regular subgroups of the affine group, International Journal of Group Theory. 1. 2012. С.17-23.
8. I.Yu. Mogilnykh, Regular subgroups of the automorphism group of the linear Hadamard code, submitted to SEMR, <https://arxiv.org/abs/1807.04446>

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов*

Зотов И.Н.

*Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет*

Исследования отношения элементарной эквивалентности алгебраических систем в логике первого порядка, восходят к теореме А.И. Мальцева [1]. Теоретико-модельные свойства и соответствия Мальцева линейных групп и колец изучались в тесной связи с изоморфизмами с 70-х годов, см. монографию [2]. В [3] отмечались вопросы о соответствии Мальцева и нильтреугольных подалгебр $\mathcal{NF}(K)$ алгебр Шевалле. Описание изоморфизмов устанавливает

Теорема 1. Пусть $\varphi: \mathcal{NF}(S) \rightarrow \mathcal{NF}(K)$ изоморфизм колец Ли классического типа ранга $n > 4$ над ассоциативно коммутативными кольцами K и S с единицами, причём для типов B_n и C_n аннулятор элемента 2 в K и S нулевой. Тогда φ есть произведение $\varphi = \bar{\tau}\bar{\theta}\eta$ изоморфизмов $\bar{\tau}$ и $\bar{\theta}$, индуцированных подходящей эквивалентностью $\tau: \Phi' \rightarrow \Phi$ систем корней и изоморфизмом $\theta: S \rightarrow K$ колец коэффициентов, и автоморфизма $\eta \in \text{Aut } \mathcal{NF}(K)$.

Теорема 1 и разработанные методы приводят к перенесению соответствия Мальцева на нильтреугольные подалгебры $\mathcal{NF}(K)$ алгебр Шевалле.

Список литературы

1. Мальцев А.И. Элементарные свойства линейных групп. Некоторые проблемы в Математике и механике. Новосибирск: Издательство АН СССР, 1961, 110-132.
2. Бунина Е.И., Михалёв А.В., Пинус А.Г. Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М: МЦНМО, 2015, 360 с.
3. Левчук В.М. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле. Итоги науки. - Юг России, Т. 6. (2012), 75-84.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-007-07).

Диофантовы уравнения второй степени от трёх и более переменных

Бокарев Н.Л.¹, Буякова Е.В.²

¹Новосибирский государственный университет,
²КГУ "ОШ №6 акимата г. Шахтинска"

Несколько лет назад преподаватель Стэндфордского университета, занимающийся проблемами кристаллографии, предложил нам рассмотреть ряд уравнений, которые описывают кристаллические решётки некоторых веществ, имеющих, например, плоско кристаллическую структуру.

Мы поставили целью рассмотреть уравнения вида $x^2 + 2y^2 = z^2$, $x^2 + 3y^2 = z^2$ и так далее и найти способ задания общей формулы всех решений диофантовых уравнений такого вида. В результате была решена более общая задача: найдена общая формула решений уравнения $x^2 + py^2 = z^2$, где p - простое число. Позже найдены единые формулы решения уравнений

$$x^2 + ky^2 = z^2,$$

$$x = h \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^s k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r k_i}{(2 \cdot m^2 \cdot \prod_{i=1}^s k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r k_i)}, \quad y = h \frac{2mn}{(2 \cdot m^2 \cdot \prod_{i=1}^s k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r k_i)},$$

$$z = h \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^s k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r k_i}{(2 \cdot m^2 \cdot \prod_{i=1}^s k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r k_i)},$$

где $k, x, y, z \in \mathbb{N}$, k - любое свободное от квадратов число; $m, n, h, k_i \in \mathbb{N}$ ($i = \overline{1, r}$), $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^s k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^r k_i$, k_i - простые множители, составляющие число k .

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

где $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, а так же уравнения более общего вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2,$$

$$x_1 = k \frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 - b^2}{(2b; \sum_{i=2}^n a_i^2 - b^2)}, \quad x_i = k \frac{2a_i b}{(2b; \sum_{i=2}^n a_i^2 - b^2)}, \quad y = k \frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 + b^2}{(2b; \sum_{i=2}^n a_i^2 - b^2)}$$

где $x_i, y \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$; $k_i, a_i, b \in \mathbb{N}$, ($i = \overline{2, n}$), $(a_2, a_3, \dots, a_n, b) = 1$, $\sum_{i=2}^n a_i^2 > b^2$. Использование арифметических функций позволило записать найденные решения в виде единой формулы.

Новизна работы состоит в применении арифметических функций при нахождении и записи решении некоторых неопределённых уравнений. Решения данных уравнений либо не рассматриваются в

доступной литературе, либо найденные нами решения существенно отличаются от приводимых [1-2] и получены самостоятельно.

Список литературы

1. Гельфанд А. О. Решение уравнений в целых. М.: ИТКЛ, 1987. – 78 с.
2. Кожегельдинов С. Ш. О задачах, связанных с пифагоровыми тройками: материалы межвузовской конференции, посвящённая 150-летию со дня рождения Абая// Семей: СГУ имени Шакарима, 1991. С. 132-133.

Секция «Вычислительная математика и компьютерное моделирование»

Методы математического моделирования в задачах снижения ущерба от морских катастрофических волн

Бейзель С.А.¹, Гусев О.И.¹, Кихтенко В.А.¹, Чубаров Л.Б.^{1,2},
Шокин Ю.И.^{1,2}

¹*Институт вычислительных технологий СО РАН,*

²*Новосибирский государственный университет*

Одним из стихийных бедствий, способных привести к очень тяжелым последствиям, являются волны цунами, оказывающие катастрофическое воздействие на хозяйственные объекты и население прибрежных территорий. События начала XXI века (Суматранское, Японское и Чилийские цунами) стимулировали поиск новых подходов, моделей и алгоритмов для решения двух основных практических задач – оперативного прогноза и предварительного цунамирайонирования побережья.

Определенное внимание авторы доклада уделяют совершенствованию математических моделей, применяемых для определения характеристик трёх основных стадий трансформации катастрофических волн на трассах от зон их возникновения до взаимодействия с береговыми зданиями и сооружениями – генерации, распространения и наката. При этом исследуется зависимость характеристик волновых режимов от учёта частотной дисперсии и сопутствующих геодинамических процессов, связанных с накатом волн на берег, с оползневыми механизмами генерации волн, с вращением Земли и т.п.

Особую значимость при решении задач цунамирайонирования принимает разработка методик, алгоритмов и программ для оценки цунамиопасности побережий в терминах вероятности превышения некоторого порогового значения количественной меры интенсивности волны цунами в заданный промежуток времени. Подобного рода прикладные задачи значительно повышают требования к вычислительным ресурсам, способным обеспечить выполнения массовых сценарных расчетов в разумное время. Для решения таких задач оказывается необходимым существенно расширить перечень исход-

ной информации, включая в него сведения из исторических каталогов, информацию о сейсмотектонике исследуемого региона и т.п.

Отдельные задачи возникают в связи с эффективной реализацией упомянутых моделей и алгоритмов, в том числе с обеспечением корректности имплементации алгоритмов, их интероперабельности, а также с интерпретацией и визуализацией результатов расчетов.

Численное моделирование течения крови в полном анастомозе

Борисов В.Г.^{1,2}, Захаров Ю.Н.^{1,2}, Шокин Ю.И.², Овчаренко Е.А.³,
Клышников К.Ю.³, Сизова И.Н.³, Батрагин А.В.⁴,
Кудрявцева Ю.А.³, Онищенко П.С.¹

¹*Кемеровский государственный университет,*

²*Институт вычислительных технологий СО РАН,*

³*ФГБНУ «Научно-исследовательский институт комплексных проблем сердечно-сосудистых заболеваний»,*

⁴*ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»*

Методами вычислительной гидродинамики моделируется трехмерное нестационарное периодическое течение крови в ксеногенных сосудистых биопротезах. Геометрия расчетной области строится по данным микротомографического сканирования биопротезов. Для задания переменного градиента давления, вызывающего нестационарное течение в протезе, используются персонально-специфические данные Допплер-эхографии течения крови конкретного пациента. Проводится сравнительный анализ полей скорости в областях течения, соответствующих трем реальным образцам биопротезов, имеющим множественные стенозы и полном анастомозе. В зонах стенозов и вне их анализируется распределение пристеночного напряжения сдвига, влияющее на факторы риска возникновения тромбоза в протезе. Предложен алгоритм прогнозирования гемодинамических эффектов, возникающих в сосудистых биопротезах, основанный на численном моделировании течения крови в них. Приводятся результаты расчётов течения крови при различных давлениях и пульсациях.

Негидростатическая мезомасштабная метеорологическая модель TSU-NM3 и ее применение для краткосрочного прогнозирования выпадения осадков в условиях западной Сибири*

Старченко А.В., Барт А.А., Кижнер Л.И.

Томский государственный университет

Процессы, происходящие в атмосферном пограничном слое, оказывают существенное влияние на жизнь и деятельность человека. Поэтому одной из актуальнейших проблем как фундаментальной, так и прикладной отраслей наук о Земле является создание информационных систем мониторинга и прогнозирования состояния приземного слоя атмосферы над населенными пунктами с помощью математических метеорологических моделей высокого разрешения.

В данной работе представлены результаты численного исследования локальных атмосферных процессов над ограниченной территорией, полученные с помощью разрабатываемой в Томском государственном университете мезомасштабной метеорологической модели высокого разрешения [1]. Эта модель является негидростатической и включает трехмерные нестационарные уравнения гидротермодинамики атмосферного пограничного слоя с параметризацией турбулентности, микрофизики влаги, длинноволновой и коротковолновой (солнечной) радиации, адвективного и скрытого потоков тепла в атмосфере и на границе ее взаимодействия с подстилающей поверхностью. Мезомасштабная модель была применена к исследованию метеорологических процессов над г. Томск и аэропортом Богашево. Особое внимание уделено прогнозируемости интенсивного выпадения осадков (дождя, града, снега). Результаты расчетов сравниваются с данными наблюдений.

Список литературы

1. Starchenko A.V., Bart A.A., Bogoslovsky N.N., Danilkin E.A., Terentyeva M.V. A mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial centre // Proceedings of SPIE 9292, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 2014, Vol. 9292. 929249-1-929249-30.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Томской области, грант № 16-41-700178 p_a.

Об устойчивости мультивейвлетов, ортогональных многочленам*

Шумилов Б.М.

*Томский государственный архитектурно-строительный
университет*

В докладе излагаются результаты исследования мультивейвлетов нечетной степени с носителем $[0, 2]$, ортогональных многочленам той же степени [1], на конечном отрезке.

Доказано свойство уменьшения носителей по сравнению с классическими мультивейвлетами. Представлен алгоритм построения мультивейвлетов с применением для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений метода блочной матричной прогонки [2, 3]. Исследована устойчивость мультивейвлет-преобразования на больших сетках вычислением чисел обусловленности в евклидовой норме прогоночных матриц. Дан численный пример аппроксимации и сжатия данных для случая эрмитовых сплайн-мультивейвлетов 7-й степени.

Список литературы

1. Шумилов Б.М. Мультивейвлеты эрмитовых сплайнов третьей степени, ортогональные кубическим многочленам // Математическое моделирование. 2013. № 4. С. 17–28.
2. Шумилов Б.М. Алгоритм матричной прогонки вычисления мультивейвлетов нечетной степени, ортогональных многочленам // Автометрия. 2015. Т. 51, № 2. С. 83–92.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 p_a).

В обоснование «одноточечного» метода внешней калибровки камеры смартфона*

Шумилов Б.М.

Томский государственный архитектурно-строительный университет

Автоматическое распознавание дорожных дефектов позволяет уменьшить экономические потери, неизбежные вследствие того, что по мере эксплуатации трещины и выбоины становятся слишком значительными [1]. В недавнем прошлом при «ручной» диагностике и паспортизации текущего состояния автомобильных дорог традиционно использовалась мобильная видеосъемка. Однако проблемой работы систем, основанных на чистом видео, является их неспособность различать затенения на снимках, вызванные не только разрушением мостовой, но и такие как элементы дорожной разметки, пятна от разливов горючесмазочных жидкостей, тормозные следы, тени проезжающих автомобилей и свежие заплатки. Преодолеть ограничения стандартных методов видеодиагностики, основанных на анализе однородных видеоизображений дорожных покрытий, могут диагностические подходы, основанные на использовании как 2-мерной (2D), так и 3-мерной (3D) информации о дорожном покрытии [2]. Использование современных фотограмметрических способов для определения повреждений и неровностей поверхности дорожного полотна и конструктивных элементов дороги дает новый импульс к развитию цифровых технологий проектирования ремонтов автомобильных дорог, повышению мобильности и снижению стоимости работ [3].

Список литературы

1. Bao G. Road distress analysis using 2D and 3D information. The University of Toledo Digital Repository Theses and Dissertations, 2010, 95 p.
2. Shumilov B.M., Baigulov A.N. A study on modeling of road pavements based on laser scanned data and a novel type of approximating hermite wavelets // WSEAS Transactions on signal processing. 2015, v. 11, p. 150-156.
3. Shapiro L.G., Stockman G.C. Computer vision. Prentice Hall, 2001, 617 p.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 p_a).

Полуавтоматическая генерация трехмерной индивидуализированной модели позвоночника по рентгеновским снимкам*

Григорьева И.В., Колпинский Г.И., Тоцкий А.А., Сечкарев А.Б.,
Вьюнник Н.М.

Кемеровский государственный университет

Рентгенография играет важную роль в визуальном диагностировании заболеваний костно-мышечной системы человека, она также является наиболее доступным средством исследования и чаще всего назначается детям при первичной диагностике сколиоза. Целью данной работы является построение индивидуализированной трехмерной математической модели позвоночника на базе рентгеновских снимков в проекциях для определения типа и степени сколиоза у детей. Модель учитывает размеры, наклон, повороты и положение позвонков относительно друг друга и дополнена описанием сколиотической кривой, представленной неоднородным рациональным B-сплайном.

Рентгеновский снимок является достаточно сложным объектом исследования, так как на нем отображаются все кости, попавшие в область снимка. Изображения этих костей могут накладываться на изображения позвоночника, создавая существенные препятствия для его распознавания. Поэтому первичная задача при построении модели позвоночника - определение позвоночного столба и отдельных позвонков. Для распознавания рентгеновских снимков используется нейронная сеть U-Net. Сети, распознающие позвонки во фронтальной и сагиттальной поверхностях, а также тазовые кости, обучались отдельно. Результатом распознавания являются изображения с искомыми элементами, по которым определяются контуры и центры позвонков и вычисляются их характеристики. В случае низкого качества снимков производится ручная доразметка позвонков. На основе вычисленных характеристик позвонков строится пространственная модель, а также позвоночная дуга. В дальнейшем планируется использовать математическое моделирование для вычисления нагрузок на деформированный позвоночный столб с целью определения корректирующих воздействий.

*Работа поддержана внутриуниверситетским грантом "Математическое моделирование индивидуализации лечения сколиоза позвоночника".

Численный алгоритм для полностью нелинейной дисперсионной модели мелкой воды: анализ свойств и применение в задачах о поверхностных волнах

Гусев О.И., Хакимзянов Г.С.

Институт вычислительных технологий СО РАН

В докладе рассматриваются численные алгоритмы для нелинейно-дисперсионных (НЛД-) моделей мелкой воды второго приближения. Несмотря на то, что такие модели (а с ними и численные алгоритмы) разрабатываются более пятидесяти лет, работы по теоретическому анализу свойств этих алгоритмов встречаются крайне редко. В то же время, актуальность применения НЛД-моделей в задачах о поверхностных волнах, таких как, например, цунами, на текущий момент не вызывает сомнения [1].

В настоящей работе рассматриваются наиболее популярные численные алгоритмы для НЛД-моделей. Теоретически исследуются свойства этих алгоритмов (устойчивость, численная дисперсия и диссипация) для линеаризованных двумерных моделей. Акцент делается на численных алгоритмах [2], основанных на расщеплении исходной системы НЛД-уравнений на две подзадачи: гиперболическую систему уравнений мелкой воды с правой частью и эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления. На каждом шаге по времени в численных алгоритмах эти подзадачи решаются поочередно. Гиперболическая часть решается при помощи явной двушаговой схемы типа предиктор-корректор. Предлагается несколько вариантов таких схем в зависимости от того, где определяются искомые величины. Показано, что условие устойчивости численного алгоритма для НЛД-модели может быть даже менее ограничительным, чем аналогичного алгоритма для бездисперсионной модели мелкой воды. Модификации схемы существенно влияют на её свойства. Так, например, некоторые варианты являются абсолютно неустойчивыми при малых относительно глубины акватории шагах сетки по пространству.

Приводятся примеры численных расчётов в задачах о поверхностных волнах: от простейших модельных случаев до задач с реальным рельефом дна.

Список литературы

1. Glimsdal S., Pedersen G.K., Harbitz C.B., Lovholt F. Dispersion of tsunamis: does it really matter? // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2013. Vol. 13. P. 1507–1526.
2. Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O. Dispersive shallow water wave modelling. Part IV: Numerical simulation on a globally spherical geometry // Communications in Computational Physics. 2018. Vol. 23, No 2. P. 361–407.

Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта*

Данилкин Е.А., Грудович Л.Е.

Томский государственный университет

В настоящее время одной из важных проблем экологии является качество атмосферного воздуха в городах. Это проблема особенно актуальна, так как население планеты в основном проживает на урбанизированных территориях, и процесс урбанизации продолжается. Так, например, в России с 2015 года доля городского населения составляет уже 74 %.

Для исследования процессов распространения выбросов автотранспорта, происходящих в городской застройке, необходимо развитие и внедрение математических моделей, описывающих движение воздуха и перенос выбросов автотранспорта. Используя такие модели, можно предсказывать концентрацию вредных примесей для различных метеоусловий и конфигурации городской застройки. Помимо этого исследования процессов распространения выбросов автотранспорта актуальны для понимания микроклимата городов, полезны в планировании новых зданий и оценке зон повышенной экологической опасности.

В работе рассмотрено построение математической модели, описывающей процесс распространения газообразной примеси в городских кварталах и численного метода ее решения. Математическая модель включает в себя уравнение неразрывности, уравнения Навье–Стокса и уравнение переноса с заданными начальными и граничными условиями. Численное решение полученной системы осуществляется на основе метода конечного объема. Аппроксимация конвективных членов уравнения переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы. Аппроксимация диффузионных

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1723.2017.5.

членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Для согласования полей скорости и давления используется метод SIMPLE.

Численное моделирование подтопления поймы р. Томь во время весеннего ледохода*

Чуруксаева В.В., Старченко А.В.

Томский государственный университет

На реке Томь вблизи города Томска регулярно наблюдаются ледовые заторы, которые вызывают значительный подъем уровня воды в реке и затопление территорий в пойме.

Математические модели, заложенные в большинстве существующих пакетов программ для гидрологического моделирования, недостаточно точны в математическом описании физических процессов и требуют входных данных высокого качества, прежде всего батиметрических. Таким образом, построение современных математических моделей для исследования течения в небольшой реке, для которой отсутствуют данные требуемой точности, является актуальной задачей.

Предлагаемая математическая модель нестационарного двухфазного изотермического движения смеси «вода – ледяные частицы» в открытом канале строится на основе уравнений механики взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов, в соответствии с которой ледяные частицы представляются сплошной средой с эффективными свойствами.

С помощью предложенной гидродинамической модели получены результаты моделирования течения во время ледохода на нескольких участках р. Томь протяжённостью порядка 50 км каждый. Для данных участков существуют обширные данные наблюдений, которые позволяют верифицировать результаты расчетов.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-31-00386), а также РФФИ и Администрации Томской области в рамках научного проекта № 16-41-700178р_а.

Итерации функции Эйлера и функции, определяющей число делителей

Зюзьков В.М.

Томский государственный университет

Пусть n – натуральное число. Итерируя функцию Эйлера φ , определим последовательность n_1, n_1, n_2, \dots рекурсивно: $n_1 = \varphi(n)$ и $n_{k+1} = \varphi(n_k)$ для $k = 1, 2, 3, \dots$. Последовательность n, n_1, n_1, n_2, \dots монотонно убывает, пока не достигнет 1. Пусть $r(n)$ – функция от натурального числа n , дающая такое число итераций r функции Эйлера, что $n > n_1 > n_2 > \dots \geq n_r = 1$. Изучая поведение функции $r(n)$ с помощью Wolfram Mathematica замечаем, что значения функции $r(n)$ растут не монотонно, меняясь в некотором диапазоне, верхняя и нижняя границы которого монотонно возрастают.

Были проделаны вычислительные эксперименты, которые показали, что в промежутке $1 \leq n \leq 10^{10}$ «верхняя огибающая» и «нижняя огибающая» аппроксимируются соответственно функциями $1,47317 \ln n$ и $0,98659 \ln n$.

Пусть значение функции $\tau(n)$ равно числу всех положительных делителей натурального числа n . Определим последовательность целых чисел n_1, n_2, n_3, \dots по правилу $n_1 = \tau(n)$ и $n_{k+1} = \tau(n_k)$ для $k = 1, 2, 3, \dots$. Определим функцию g , значение которой для целого $n > 1$ равно наименьшему k со свойством $n_k = 2$. Функция $g(n)$ определена для всех $n > 1$.

Вычисления показывают, что в точках $m = 3, 4, 6, 12, 60, 5040$ значения $g(m)$ увеличиваются на единицу по сравнению с числом $\max\{g(n) \mid 2 \leq n < m\}$. Числа m с указанным свойством образуют бесконечную быстро возрастающую последовательность $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 6, b_4 = 12, b_5 = 60, b_6 = 5040, \dots$ ($b_7 > 10^6$).

Определим последовательность целых чисел: $h_1 = 3$ и для $k > 1$ число h_k есть наименьшее со свойством $\tau(h_k) = h_{k-1}$. Цель – изучить последовательности b_1, b_2, b_3, \dots и h_1, h_2, h_3, \dots с помощью Wolfram Mathematica. Построен быстрый алгоритм для нахождения элементов последовательности h_1, h_2, h_3, \dots .

Предложение. Для любого натурального k выполнено $b_k \leq h_k$.

Список литературы

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы пространственной области в случае плоских задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода

Иванов Д.Ю.

Российский университет транспорта (МИИТ)

Исследуется применение коллокационного метода граничных элементов для решения внутренних и внешних начально-краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода для уравнения $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в плоской пространственной области Ω (в ограниченной Ω^+ или в ее внешности Ω^-) на конечном временном промежутке $I_T \equiv [0, T]$ при нулевом начальном условии. При решении задач в круговой области с помощью граничных интегральных уравнений второго рода на основе классического КМГЭ было замечено, что точность решения в значительной мере снижается вблизи границы $\partial\Omega$ пространственной области Ω . По-видимому, это связано с использованием в рамках классического КМГЭ квадратурных формул Гаусса для вычисления интегралов по длине дуги на заключительном этапе алгоритма, когда вычисляется потенциал во внутренних точках области. Действительно, если граничные элементы расположены на малом расстоянии r от точки, в которой вычисляется потенциал, то производные подынтегральной функции при определенном соотношении r и t сильно возрастают, что может привести к уменьшению точности.

В связи с этим для вычисления потенциала предлагается подход, аналогичный описанному в работе [1] методу решения соответствующих данным задачам граничных интегральных уравнений второго рода. В работе [1] аппроксимация интегралов на сингулярных и околосингулярных граничных элементах осуществляется на основе аналитического интегрирования по расстоянию между точками границы. Теперь и для вычисления потенциала предлагается вычислять интегралы для малых расстояний r с помощью аналитического интегрирования по некоторой компоненте r . При условии $\partial\Omega \in C^5$ для предлагаемой схемы доказана равномерная в замкнутой области $\bar{\Omega} \times I_T$ кубическая сходимость. Точность численного решения, полученного в круговой области на основе предлагаемого

метода, вблизи границы $\partial\Omega$ практически та же, что и вдали от границы, при этом относительная погрешность $\approx 10^{-4}$. В то же время относительная погрешность численного решения, полученного с помощью классического КМГЭ, вблизи границы увеличивается до $\approx 10^{-2}$.

Список литературы

1. Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29.

О постановке граничных условий при решении задач гидродинамики

Иванов К.С., Яшин М.Е.

Кемеровский государственный университет

Для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в большинстве случаев используется система уравнений Навье-Стокса [1]. В зависимости от условий задач, можно использовать один из двух вариантов граничных условий: «в скоростях» и «в давлениях». Одним из способов верификации численного алгоритма является расчет одной и той же задачи в двух эквивалентных постановках. Под эквивалентными понимаются такие постановки граничных условий «в давлениях» и «в скоростях», при которых соответствующие численные решения задачи совпадают на всем промежутке времени расчета. Целью настоящей работы является реализация алгоритма решения нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости и его верификация путем сравнения численных решений, полученных с помощью двух эквивалентных постановок граничных условий.

Для численного интегрирования по времени используется метод расщепления по физическим процессам. Для дискретизации области используется разнесенная сетка [1]. Дифференциальные уравнения аппроксимируются со вторым порядком точности. Для постановки граничных условий на компоненты предварительной скорости необходимо знать градиент давления на границах области. Таким образом, граничные условия второго рода для функции давления должны быть заданы еще на первом шаге схемы. Уравнения на компоненты предварительной скорости решаются с помощью схемы

переменных направлений. Для решения уравнения на функцию давления используется метод бисопряженных градиентов со стабилизирующей поправкой.

В работе реализованы численные алгоритмы решения системы нестационарных уравнений Навье-Стокса с двумя типами граничных условий. Проведена верификация алгоритмов с помощью сравнения численных полей решений, полученных в условии эквивалентности постановок. Результаты показали, что правильная постановка граничных условий на вектор предварительной скорости оказывает существенное влияние на точность численного решения.

Список литературы

1. Иванов К. С. Использование итерационных схем при решении систем нестационарных уравнений Навье-Стокса / Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2015. — 118 с.

Математическая модель мониторинга и управления процессом биологической очистки сточных вод

Кудрявцев В.А.¹, Рычков С.Л.², Шатров А.В.¹

¹*Кировский государственный медицинский университет,*
²*Вятский государственный университет*

Рассматривается математическая модель процесса биологической очистки сточных вод. Имитационная модель представляет собой систему дифференциальных уравнений типа *ASM*, однако ввиду того, что полная модель *ASM* содержит большое число уравнений и крайне затруднительна для идентификации, мы выделяем азотную группу загрязнителей, представляющих основную часть загрязнений бытовых и промышленных стоков, а также группу двух типов бактерий в процессе биологической очистки. В результате размерность модели сокращается. Удаление азота осуществляется путем нитрификации и следующей за ней денитрификации. Нитрификация – процесс окисления ионов аммония NH_4^+ до нитратов NO_3^- , который осуществляется в два этапа. На первом этапе бактерии вида *Nitrosomonas* окисляют аммоний до нитрита NO_2^- по схеме $NH_4^+ + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow 2H^+ + NO_2^- + H_2O$. На втором этапе бактерии *Nitrobacter* окисляют нитрит до нитрата по схеме

$NO_2^- + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow NO_3^-$. Идентификация модели и мониторинг осуществляются с помощью аппаратно-программного комплекса Акватест 4М. Для управления процессом используется квадратичный функционал отклонений расчетной концентрации ХПК (химическое потребление кислорода) и концентраций азотной группы от реальных значений в точках измерения.

Применение неявного итерационного полинейного рекуррентного метода при решении систем разностных уравнений повышенного порядка аппроксимации

Фомин А.А.¹, Фомина Л.Н.²

¹*Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева,*

²*Кемеровский государственный университет*

Использование неявного итерационного полинейного рекуррентного метода для решения разностных СЛАУ при численном моделировании процессов гидродинамики и теплообмена показало его высокую эффективность [1]. Однако, в силу конструктивных особенностей этого метода, область его применения для двумерных задач ограничена пятиточечными разностными схемами [2]. Задачей настоящего исследования является расширение области применения метода на решение СЛАУ с девятидиагональными матрицами, которые возникают при использовании разностных схем повышенного порядка аппроксимации. В этих целях предлагается алгоритм так называемой компенсационной трансформации исходных линейных уравнений, который, также как и метод отложенной коррекции [3], позволяет сводить девятиточечные разностные уравнения к пятиточечным.

Эффективность данного подхода исследуется путем сравнительного анализа результатов построения решения СЛАУ с девятидиагональной матрицей различными итерационными методами, позволяющими находить решение задачи как напрямую, так и в сочетании с методом отложенной коррекции или алгоритмом компенсационной трансформации. Результат исследования позволяет сделать вывод, что несмотря на использование промежуточного алгоритма компенсационной трансформации неявный итерационный полинейный рекуррентный метод сохраняет свою высокую эффективность и

разрешающие способности при нахождении решения разностных эллиптических СЛАУ.

Список литературы

1. Фомин А. А., Фомина Л. Н. Численное решение уравнений Навье – Стокса при моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 3(29). С. 82–93.
2. Фомин А. А., Фомина Л. Н. О сходимости неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных эллиптических уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 6. С. 857–880.
3. Сиковский Д. Ф. Методы вычислительной теплофизики. Новосибирск: НГУ, 2013. 98 с.

К теории образования гидрата в снежном слое при нагнетании газа

Чиглинцева А.С.

Уфимский научный центр РАН

Газовые гидраты, как известно, представляют собой твердые кристаллические соединения, образованные молекулами воды и основными компонентами природного газа. Известно, что газогидраты можно использовать как удобную форму для хранения и утилизации парниковых, радиоактивных, промышленных и других газов, тем самым предотвращая выбросы вредных веществ в атмосферу [1]. Так, в 2003 году в Японии компания Mitsui Engineering & Shipbuilding (MES) впервые в мире разработала демонстрационный наземный проект по транспортировке и хранению природного газа в форме гидратных гранул. В 2009 году MES совместно с Chugoku Electric Power построили первую в мире производственную установку для гидрата природного газа мощностью до 5 тонн в сутки [1].

В работе решена задача о нагнетании гидратообразующего газа в снежный слой, в исходном состоянии насыщенный тем же газом. Для осесимметричной задачи построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также насыщенностей фаз (снега, воды, гидрата и газа) в массиве. Показано, что в зависимости от исходного термобарического состояния системы «газ-снег», а также массового расхода нагнетаемого газа, в области фильтрации можно выделить различные характерные зоны, отличающиеся по своей структуре и протяженности [2].

Список литературы

1. Nakai S. Development of Natural Gas Hydrate (NGH) Supply Chain // Proceedings, 25th World Gas Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 4-8 June, 2012, pp. 3040–3050.
2. Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С. О нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, при переходе через точку плавления льда // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 1. С. 89–104.

О ресурсоёмкости сплайн-вейвлетных алгоритмов*

Эшаров Э.А., Макаров А.А.

Томский государственный архитектурно-строительный университет

Вычислительная сложность алгоритма оценивается количеством элементарных операций, затрачиваемых алгоритмом на решение конкретной задачи. Эффективность зависит не только от размерности входных данных, но и от самих данных. Очевидно, что чем сложнее алгоритм в вычислительном плане, тем больше времени и вычислительных ресурсов потребуется для его выполнения. Различают временную и пространственную сложности. Первая определяет время, требуемое на решение задачи заданной размерности с помощью данного алгоритма, а вторая – количество требуемых ресурсов (памяти) при тех же условиях. Каждый вычислительный алгоритм может быть отнесен к одному из двух классов сложности [1]. В данной работе мы анализируем алгоритмы [2] и [3] на примере вейвлет-разложения сплайнов первой степени с точки зрения количества вычислительных операций в сравнении с классическим подходом, изложенным в [4–6], и сравниваем возможности оптимизации параллельной реализации представленных алгоритмов по быстродействию и объему памяти.

Список литературы

1. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Миросниченко. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
2. Макаров А.А. Алгоритмы вейвлетного сжатия пространств линейных сплайнов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 2. С. 41-51.
3. Шумилов Б.М. О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением // Сибирский журнал вычислительной математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 85–96.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400_p_a).

4. Wang J. Cubic spline wavelet bases of sobolev spaces and multilevel interpolation // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 1996. – Vol. 3, iss. 2. – P. 154–163.
5. Cai W., Wang J. Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDEs // SIAM J. on Numerical Analysis. – 1996. – Vol. 33, iss. 3. – P. 937–970.
6. Kumar V., Mehra M. Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems. // Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.– 2007. – Vol. 5. – iss. 2. – P. 317–331.

Исследование производительности современных СУБД

Шельмина Е.А.

*Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники*

Стремительное развитие вычислительной техники повлияло на развитие технологии баз данных. Так, с каждым днем объем хранимой и обрабатываемой информации неуклонно растет. Это приводит к необходимости создания все более мощных и производительных баз данных. При этом бюджеты компаний из года в год растут достаточно медленно. В результате через некоторое время большинство компаний сталкиваются с тем, что доступных средств перестает хватать даже на масштабирование существующих решений, не говоря уже о внедрении новых систем.

В представляемой работе проведен сравнительный анализ и тестирование производительности современных настольных и клиент-серверных СУБД [1] на примере Microsoft Access, Paradox, а также клиент-серверных СУБД: Firebird, MySQL и Oracle. В результате исследования определены достоинства и недостатки и сформированы критерии и практические рекомендации при выборе СУБД для решения различных задач. Так, оптимально использовать СУБД Paradox для небольших проектов персонального пользования, СУБД Microsoft Access также рекомендовано использовать для решения задач при создании небольших баз данных. Недостатками данной СУБД являются быстрый рост размеров БД за счет создания большого количества черновых записей. Результаты тестирования показали, что при увеличении количества записей со 100 до 1 миллиона СУБД Oracle показала значительно более высокую производительность в отличие от MySQL и Firebird. MySQL же является решением для малых и средних приложений. Обычно MySQL используется в качестве сервера, к которому обращаются локальные или удалённые клиенты. СУБД Firebird поддерживает большие базы данных. И как

в любой СУБД на производительность Firebird влияют: количество памяти, скорость работы дисковой подсистемы [2].

Список литературы

1. Информационные системы: учебник для вузов/ Ю.С. Избачков, В.Н. Петров – 2 изд., доп. – СПб.: Питер, 2006. – 656 с.
2. Введение в базы данных: Архитектура клиент - сервер [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mstu.edu.ru/study/materisls/zelenkov/ch_7_1.html, дата обращения: 15.05.2018.

Точные решения задачи о колебании свободной поверхности в модельной акватории и их применение для верификации численных алгоритмов наката волн на берег

Мацкевич Н.А., Чубаров Л.Б.

Новосибирский государственный университет

Алгоритмы моделирования наката волн на берег нуждаются в релевантных методах верификации, из которых наибольшую ценность имеет сопоставление численного решения с точным. Но из-за нелинейности системы уравнений движения в совокупности с подвижностью границ, аналитические методы применимы лишь в редких, исключительных случаях. Как следствие, исследователи вынуждены ограничиваться малым и редко обновляющимся набором классических задач. Зачастую используются лишь одномерные тесты, не выявляющие недостатков расчета искривленной подвижной линии уреза.

Настоящий доклад посвящен построению новых точных решений специального вида, моделирующих в рамках двумерных уравнений мелкой воды колебания свободной поверхности в акватории, ограниченной параболоидом вращения (вплоть до вырожденного случая). Для поиска точных решений используется подход F.K.Ball [1], дополненный W.C.Thacker [2], т.е. по заданной форме решений определяются неизвестные параметры процесса. Делается ряд предположений относительно учета вращения Земли (силы Кориолиса) и донного трения. Окончательные результаты получаются путем решения систем нелинейных ОДУ. Определяются диапазоны входных параметров, отвечающие равномерно ограниченными решениям с возможностью пространственной локализации.

Полученные результаты могут быть применены для исследования методов моделирования поверхностных волн в области с подвижной границей. В качестве примера рассмотрен консервативный вариант алгоритма метода «Крупных частиц» [3].

Список литературы

1. Ball, F.K. An Exact Theory of Simple Finite Shallow Water Oscillations of a Rotating Earth // Proc. 1st Austral. Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics, Pergamon. - 1964. - Pp. 293-305.
2. Thacker, W.C. Some Exact Solutions to the Nonlinear Shallow-Water Wave Equations // Journal of Fluid Mechanics. - N. 107. - 1981. - Pp. 499-508.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. - М.: Наука. - 1982. - 392 с.

Динамика вихрей, управляемая пининг центрами в Nb сверхпроводящих открытых микротрубках*

Смирнова Е.

Томский политехнический университет

Динамика вихрей в Nb сверхпроводящих открытых микротрубках изучена теоретически на основе численного анализа системы уравнений Гинзбурга-Ландау используя пространственно-временную конечно-разностную схему. Рассмотрено влияние одиночных и множественных пининг-центров. Динамика вихрей описывается двумя характеристическими временами – период нуклеации вихрей на границе трубки и длительность прохождения вихря через трубку. Моделирование показало, что оба характеристических времен изменяются более чем в два раза при наличии пининг-центров. Различные режимы динамики вихрей могут эффективно контролироваться положением пининг-центров при заданном магнитном поле, радиусе трубки и транспортном токе. Показано, что эффект влияния кривизны трубки [1] на динамику вихрей сохраняется при наличии пининг-центров.

Список литературы

1. Fomin V.M., Rezaev R.O., Schmidt O.G. Tunable generation of correlated vortices in open superconductor tubes //Nano Lett., 2012, 12, 1282-1287.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00228.

Многоуровневое моделирование керамики с различной структурой пористого пространства методом подвижных клеточных автоматов*

Солин А.Ю.^{1,2}, Коростелев С.Ю.¹, Шаломеева А.А.²

¹*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,*

²*Томский государственный университет*

Метод подвижных клеточных автоматов является эффективным дискретным методом вычислительной механики, в котором предполагается, что материал состоит из набора элементарных объектов, силы между которыми определяются в соответствии с правилами многочастичного взаимодействия. В данной работе метод применён для многоуровневого моделирования механического поведения керамики с учётом структуры её пористого пространства.

Начальным уровнем в описании материала является масштаб самых мелких пор. В расчётах на этом уровне они учитываются явно путём удаления случайно выбранных автоматов из исходной ГЦК упаковки. Генерируются образцы разного размера с различным распределением пор по объёму. По результатам расчётов на сжатие для каждого образца определяются модуль сжатия E и предел прочности σ . Анализируется сходимость средних значений E и σ при увеличении размера образцов и таким образом определяется размер представительного образца текущего уровня. По E и σ представительных образцов вычисляются параметры функции отклика автоматов данного уровня, а также параметры распределения Вейбулла, описывающего их разброс. Эти параметры позволяют переходить к расчётам следующего масштаба, где, например, из автоматов предыдущего уровня состоят стенки макропор, а сами макропоры учитываются явно.

Возможности предложенного подхода продемонстрированы на примере моделирования керамики диоксида циркония с двумя характерными размерами пор.

*Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (Приоритетное направление III.23).

Image processing with Shearlets^{*}

Gerasimova Y.A.¹, Shumilov B.M.²

¹ *Volga State University of Telecommunication and Informatics,*
² *Tomsk State University of Architecture and Building*

We consider the issue of an image denoising. Scientists all over the world have been developing wavelet methods for denoising since 1980s. As far as we know, the wavelet processing is the best method for elimination of noise of signals without known formula. But wavelets have major disadvantages in processing the multidimensional data.

The shearlets were developed to overcome these disadvantages. Kutyniok G., Lim W.Q. and other did it in 2006. Shearlets are the "composite" wavelets. We can use a shearlet as a wavelet-based multidimensional expansion.

In this paper we describe our numerical experiments. It is about denoising by wavelet- and shearlet-processing. We use PSNR (peak signal-to-noise ratio) as quality metric. In the conclusion, we have got the figures showing that the shearlet-processing is the most convenient for our goals than the wavelet one.

The authors are grateful to Potocki A.A. (Tomsk State University) for the kind attitude to their paper.

References

1. Han B., Kutyniok G., Shen Z. Adaptive multiresolution analysis structures and shearlet systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2011 V. 49, No. 5. P. 1921-1946.
2. Kutyniok G., Lim W.Q. Image separation using wavelets and shearlets // *Curves and Surfaces: 7th International Conference*, Avignon, France, June 24-30, 2010, Revised Selected Papers, Springer Science & Business Media, 2011. P. 416

Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема

Давыдов А.С., Михайлов М.Д.

Томский государственный университет

Работа посвящена изучению процесса самоочищения речного водоема с помощью математической модели. Это позволяет прово-

^{*} This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Tomsk Region, project no. 16-41-700400 r_a.

дить численные эксперименты и определять возможность очистки от загрязнений водного потока.

Предлагаются модификации моделей Моно и Стритера-Фелпса [1]: точечная, одномерная и двумерная. Применяется схема расщепления Дугласа и др. [2] к модифицированной модели в двумерном приближении. Для численной реализации указанных моделей используются также явные и неявные разностные методы. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости [3].

Даются сравнения численных расчетов между собой и с результатами других авторов [4]. Расчеты иллюстрируются графиками изменения соответствующих параметров задачи, построенными с использованием средств пакета программ Matlab.

Список литературы

1. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочистки в реках. М.: Наука, 1981.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. С 360.
3. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. Томск: Издательский дом ТГУ, 2014.
4. Абеляшев Д.Г. Математическое моделирование процессов самоочищения реки с использованием модификации моделей Герберта и Стритера-Фелпса // Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / Под ред. проф. А.В. Старченко. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. С. 89-96.

Systematization of published research plots in the domain of weakly bounded complexes spectroscopy*

Lavrentiev N.A., Fazliev A.Z.

Institute of Atmospheric Optics SB RAS

This paper provides the results of selective systematization of compound plots, gathered from publications on weakly bounded molecular complexes. This systematization enables the system to organize semantic search of the processed spectral functions and internal integration of graphical resources for each molecular complex. Picture entities were introduced into GrafOnto system, that differ from scientific plots in that they do not contain multiple pairs of coordinates, but only the original image from the publication. Each picture is an elementary figure from which composite figures can be constructed. To do this, a matrix tem-

*Work on this paper was done within the scope of AAAA-A17-117021310148-7 project and RFBR grant No 13-07-00411 (software modernization of GrafOnto system).

plate is introduced that describes the geometric position of the elementary patterns in a more complex structure. After selecting the template, the expert chooses which of the constituent elements will enter each of the cells in the composite figure.

Since there are publications uploaded to the system where the figures describe not single substance but their mixture in some proportions, new interfaces have been introduced for loading and working with mixtures of substances. The information entity representing the mixture contains its names in Russian and English languages and a chemical composition that includes from 2 to 10 substances, among which can be atoms, molecules and weakly bounded molecular complexes. For each of the substances in the mixture, it is possible to specify its phase state and percentage in the mixture (the value of which can be omitted, if it is not stated in the publication).

Моделирование сверхпроводящих планарных наноструктур методом конечных разностей*

Левченко Е.А.

Томский политехнический университет

Система уравнений, состоящая из динамического уравнения Гинзбурга-Ландау [1] для параметра порядка и уравнения на вектор-потенциал магнитного поля, применена для математического моделирования сверхпроводящей фазы в магнитном поле в трехмерных Nb планарных наноструктурах. При моделировании использован метод конечных разностей.

При моделировании использовались численные схемы с постоянным и адаптивным шагом по времени. Схема с адаптивным шагом по времени позволяет ускорить расчеты в 3-4 раза, при этом точность полученных результатов сохраняется. Также для оптимизации расчета перенормировка магнитного поля считается не на каждой итерации расчета. Первый раз перенормировка рассчитывается, когда сверхпроводник приходит к стационарному состоянию.

Исследованы эффекты перенормировки магнитного поля, исследованы полное и индуцированное сверхпроводником магнитные поля. Построено распределение токов внутри сверхпроводника.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00228.

Показано, что метод конечных разностей позволяет эффективно моделировать планарные структуры размерами до 1 мкм в каждом измерении, при увеличении размеров сверхпроводника необходимо использовать другие методы, например, метод конечных элементов.

Список литературы

1. M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, McGraw-Hill: New York, 1996

Индукцированное сверхпроводящими вихрями напряжение в открытых наноструктурированных микротрубках*

Лихоманова П.А.

Московский инженерно-физический институт

Используя пространственно-временной метод конечных разностей для решения системы уравнений Гинзбурга-Ландау [1], получено индуцированное движущимися сверхпроводящими вихрями напряжение функция транспортного тока и магнитного поля для наноструктурированных микротрубок. Показано, что открытые сверхпроводящие трубки обладают меньшей диссипацией по сравнению с планарными структурами, имеющими аналогичные размеры и находящимися в аналогичных условиях: магнитном поле и транспортный ток. Индуцированное напряжение как функция магнитного поля (магнетосопротивление) дает информацию о распределении вихрей в структуре. В частности, увеличение числа цепочек вихрей в трубке приводит к 6-кратному уменьшению углового коэффициента напряжения как линейной функции магнитного поля.

Список литературы

1. M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, McGraw-Hill: New York, 1996

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00228.

Методы шумоподавления с помощью Shearlets

Потоцкая А.А.

Томский государственный университет

Рассматриваются задача подавления шума на изображениях. В качестве методов решения данной задачи рассматриваются методы, основанные на Shearlet-преобразовании.

Одним из наиболее эффективных методов подавления импульсно-го шума случайной величины является двухэтапный метод, основанный на Shearlet. Данный метод был представлен G Gao, Y Liu и D Labate в 2015 году [1]. Особенностью данного метода является то, что обработке подвергаются только «зашумленные» участки изображения.

В данной работе представлено описание указанного двухэтапного метода, а так же результаты численных экспериментов. Численные эксперименты произведены для различных моделей шума. Для сравнения представлены результаты, полученные с помощью других методов шумоподавления. В качестве критерия сравнения используется отношение пикового сигнала к шуму (PSNR).

Список литературы

1. Gao G., Liu Y., Labate D. A two-stage shearlet-based approach for the removal of random-valued impulse noise in images //Journal of Visual Communication and Image Representation. 2015. V. 32. P. 83-94.

О кардинальных сплайнах вейвлетов

Берцун В.Н., Сайнакова И.С.

Томский государственный университет

Все возрастающий интерес к вейвлетам (всплескам) [1] связан с возможностями этой теории решать задачи анализа нестационарных сигналов для широкого спектра прикладных проблем: обработка экспериментальных данных и изображений, сжатие и анализ данных, биржевые котировки и цифровая обработка сигналов, компьютерная безопасность и исследование климата, медицина, анализ ДНК и удаление тренда в данных, предсказание и предотвращение возможных катастроф, выявление и предсказание экономических и социальных явлений и др. В отличие от теории Фурье дискретный вейвлет-анализ дает возможность получить двумерную развертку

одномерного сигнала по независимым переменным масштаба и сдвига [1].

Основной идеей вейвлет-анализа является разделение исходного потока на две составляющие: основной поток и уточняющий. Одним из базовых понятий в этой теории является масштабирующая функция, интеграл от которой равен 1. Сами вейвлеты - это функции, образующие базис пространства L_2 , получаемые сдвигом и сжатием материнского вейвлета. В качестве масштабирующих функций вейвлетов могут использоваться кардинальные сплайны-функции, построенные с помощью B -сплайнов и имеющие компактные носители на целочисленной сетке \mathbb{Z} . В работе рассматриваются свойства кардинальных сплайнов и их применение для решения задач восстановления и анализа сеточных функций.

Список литературы

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Москва: РХД. – 2001.

Оптимизация нейронной сети для решения обратной задачи электроимпедансной томографии

Семёнов Е.В.

Томский государственный университет

Ранее были получены результаты решения обратной задачи электроимпедансной томографии (ЭИТ) внутри круга с однородной проводимостью [1]. Ниже приводится результат, полученный при решении обратной задачи ЭИТ в области с неоднородностью.

В качестве решателя прямой задачи был выбран пакет EIDORS (Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software). Данный пакет является открытым и свободно распространяемым, лицензированным под GNU.

Для тестирования решения прямой задачи была сформирована сетка, состоящая из 4263 элементов, включающая 2244 узла. Такой размер был взят произвольно. Также была статичной структура нейронной сети, состоящей из двух слоев. Фиктивного (входного) слоя, содержащего 148 нейронов, принимающих вектор из измерений с 16 электродов (когда ток подается и снимается по соседним парам электродов), смоделированных в среде EIDORS. И выходного слоя, содержащего значение радиуса неоднородности.

Постановка задачи: В области радиуса 1 фиксирована проводимость внешней среды 1. Далее, путем случайного изменения радиуса неоднородности, находящейся в центре области и всегда имеющей фиксированную проводимость 0,5, решалась прямая задача, предоставляющая набор измерений, на основе которых формировалась обучающая пара в выборку.

С такой задачей сеть справилась успешно. 1000 итераций обучения и 100 пар в обучающей выборке было более чем достаточно для того, чтобы найти решение с погрешностью во 2-ом знаке после запятой.

Один из результатов работы программы:

Значение, полученное нейронной сетью: 0,52962;

Ожидаемое значение: 0,51471.

Список литературы

1. Семёнов Е.В. Применение теории искусственных нейронных сетей в решении обратных задач электроимпедансной томографии: дис. ... маг-ра математики. Томск, 2016.

Секция «Геометрия и её приложения»

Неевклидовы фуллерены, их инварианты и группы отражений*

Веснин А.Ю.

Томский государственный университет

В докладе будет дан обзор недавних результатов о свойствах многогранников, имеющих комбинаторику фуллеренов. Такие многогранники возникают в теории гиперболических многообразий, теории узлов и торической топологии.

В частности, каждому фуллерену может быть сопоставлен гиперболический объем. А именно, из теорем Погорелова и Андреева следует, что фуллерены могут быть так геометрически реализованы в пространстве Лобачевского, что все их двугранные и плоские углы будут равны $\pi/2$. Поскольку для многогранников в пространстве Лобачевского имеет место свойство жесткости, объемы гиперболических многогранников могут использоваться как инварианты фуллеренов. Будет приведено описание начального сегмента множества гиперболических объемов.

Угловой бильярд и гипотеза Биркгофа

Мионов А.Е.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

В докладе будет рассмотрена динамическая система "угловой бильярд". Оказывается, что эта динамическая система в окрестности границы является двойственной к бильярду Биркгофа, в частности, в окрестности границы существует бесконечно много инвариантных кривых. С помощью этой динамической системы получены новые результаты, относящиеся к гипотезе Биркгофа об интегрируемых бильярдах.

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание № 1.12877.2018/12.1)

Two-variable polynomial invariants of virtual knots arising from flat virtual knot invariants*

Madeti P.

(Joint work with Kaur K. and Vesnin A.)

Indian Institute of Technology Ropar

Based on the affine index polynomial introduced by L. H. Kauffman [1], we introduce two sequences of two-variable polynomials $\{L_K^n(t, \ell)\}_{n=1}^\infty$ and $\{F_K^n(t, \ell)\}_{n=1}^\infty$, expressed in terms of index value of a crossing and n -th dwrithe value of a virtual knot K , where t and ℓ are variables. Based on the fact that n -th dwrithe is a flat virtual knot invariant we show that L_K^n and F_K^n are virtual knot invariants and Kauffman's affine index polynomial is a particular case of these invariants. Using L_K^n we provide conditions to specify when a virtual knot does not admit cosmetic crossing change.

References

1. Kauffman L. H. An affine index polynomial invariant of virtual knots// Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2013. V 22. № 4, 1340007.

Conjugation orbits of semisimple pairs in rank one

Gongopadhyay K.

Indian Institute of Science Education and Research

It is well known that the rank one symmetric spaces of non-compact types are the real, complex, quaternionic hyperbolic spaces and the Cayley plane. We consider Lie groups $SU(n, 1)$ and $Sp(n, 1)$ that act by the isometries of the complex and quaternionic hyperbolic spaces respectively. We classify pairs of semisimple elements in $Sp(n, 1)$ and $SU(n, 1)$ up to conjugacy. This gives local parametrization of the representations p in $\text{Hom}(F_2, G)/G$ such that both $p(x)$ and $p(y)$ are hyperbolics, where $F_2 = \langle x, y \rangle$, $G = Sp(n, 1)$ or $SU(n, 1)$. We use the $\text{PSP}(n, 1)$ -conjugation space $M(n, i, m-i)$ of ordered m -tuples of points on $\overline{H_{\mathbb{H}}^n}$, where first i points in an m -tuple are boundary points, to classify the semisimple pairs.

* This work is supported by DST – RSF Project INT/RUS/RSF/P-2 and the Russian Science Foundation (grant no. 16-41-02006)

Further, we also classify points on $M(n, i, m-i)$. This is a joint work with Sagar Kalane.

Branched cyclic coverings of connected sums of lens spaces^{*}

Kozlovskaya T.A.

Tomsk State University

We construct an infinite family of 3-manifolds and show that these manifolds have cyclically presented fundamental groups and are cyclic branched coverings of connected sums of lens spaces.

The purpose of this paper is to investigate the connection between cyclically presented groups and cyclic branched coverings of lens spaces branched over knots or links. This kind of works can be found in many papers [1, 2, 3].

We developed a method for the constructing of 3-manifolds which are branched cyclic coverings of connected sums ($k \geq 2$) of lens spaces $L(p_i, q_i)$, $i = 1, \dots, k$, i.e., for manifolds

$$N_{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_k, q_k)} = L(p_1, q_1) \# L(p_2, q_2) \# \dots \# L(p_k, q_k).$$

We are interested in the class of closed 3-manifolds which are branched cyclic coverings of connected sums of lens spaces. In particular, the class contains manifolds from [2] which are branched cyclic covers of connected sums of two lens spaces.

References

1. Cattabriga A., Mulazzani M., Vesnin A. Complexity, Heegaard diagrams and generalized Dunwoody manifolds // J. Korean Math. Soc. 2010. V. 47. № 3. P. 585–599.
2. Cristofori P., Mulazzani M., Vesnin A. Strongly-cyclic branched coverings of knots via $(g, 1)$ -decompositions // Acta Math. Hungarica. 2007. V. 116. № 1–2. P. 163–176.
3. Dunwoody M. J. Cyclic presentations and 3-manifolds // Cyclic presentations and 3-manifolds // In: Proc. Inter. Conf., Groups-Korea 94, Walter de Gruyter, Berlin-New York. 1995. P. 47–55.

^{*}The work was supported by the Ministry of Education and Science of Russia (state assignment No. 1.12877.2018/12.1.

Volume of a compact hyperbolic antiprism

Abrosimov N.^{1,2}, Vuong B.²

¹*Tomsk State University,*

²*Sobolev Institute of Mathematics*

In [1] we consider a compact hyperbolic antiprism. It is a convex polyhedron with $2n$ vertices in H^3 which has a symmetry group S_{2n} generated by a mirror-rotational symmetry of order $2n$, i.e. rotation to the angle π/n followed by a reflection. We establish necessary and sufficient conditions for the existence of such polyhedra in hyperbolic space H^3 . Then we find relations between their dihedral angles and edge lengths in the form of a cosine rule. Finally, we obtain exact integral formulas expressing the volume of a hyperbolic antiprism in terms of its edge lengths.

References

1. Abrosimov N., Vuong B. The volume of a compact hyperbolic antiprism, arXiv:1807.08297 [math.MG] 2018, 12 pp.

Twist number for welded knots

Kaur K., Madeti P.

Indian Institute of Technology Ropar

We introduce a new local move, call it as twist move, and prove that it is an unknotting operation for welded knots. Based upon this unknotting operation we define an invariant, twist number, for welded knots. We prove that this numerical invariant is bounded above by warping degree. Further, we obtain two different lower bounds on the twist number; first one is using the virtual unknotting number and the second one is using Alexander quandle coloring.

Arc shift number and gordian complex of virtual knots

Gill A.S.

Indian Institute of Technology Ropar

In this talk we introduce Gordian complex of virtual knots by arc shift move. Gordian complex is a simplicial complex where vertices are virtual knots. Two vertices have an edge between them if the distance be-

tween corresponding virtual knots by arc shift move is one. Any $n+1$ virtual knots $\{K_0, K_1, \dots, K_n\}$ forms an n -simplex iff distance between any two distinct members of the family is one.

Gordian complex of knots was first defined by Hirasawa and Uchida in [1] using crossing change as local move in classical knots. An extension of the concept to virtual knots can be seen in [2,3] using virtualization and forbidden moves.

We show the existence of an arbitrarily high dimensional simplex in the Gordian complex by arc shift move. We prove the result by constructing an infinite family of virtual knots $\{K_n\}_{n \geq 0}$ such that any pair $\{K_i, K_j\}$ of distinct knots have distance one. We use the method from [2] for computing the f -polynomial for virtual knots.

References

1. Hirasawa M., Uchida Y. The Gordian complex of knots// J. Knot Theory and Its Ramifications. 2002. V. 11 (3). P. 363–368.
2. Horiuchi S., Komura K., Ohya Y., Shimozawa M. The Gordian complex of virtual knots// J. Knot Theory and Its Ramifications. 2012. V. 21. № 14, 1250122.
3. Horiuchi S., Ohya Y. The Gordian complex of virtual knots by forbidden moves// J. Knot Theory and Its Ramifications. 2013. V. 22(09). №9, 1350051.

Левоинвариантные почти пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли

Смоленцев Н.К.

Кемеровский государственный университет

Как известно, существует 34 класса изоморфных связных односвязных шестимерных нильпотентных групп Ли. Из них только 26 классов допускают левоинвариантные симплектические структуры и только 18 допускают левоинвариантные комплексные структуры. Существует пять шестимерных нильпотентных групп Ли G , которые не допускают ни симплектических, ни комплексных структур и, поэтому, не могут быть ни почти псевдокэлеровыми, ни почти эрмитовыми. В докладе представлены результаты изучения именно этих групп Ли. Целью работы является определение на рассматриваемых группах Ли новых левоинвариантных геометрических структур, компенсирующих, в некотором смысле отсутствие симплектических и комплексных структур. Рассматриваются левоинвариантные 2-формы ω на группах Ли. Ослабляя требование замкнутости, получены невырожденные 2-формы ω , у которых внешний

дифференциал $d\omega$ является также невырожденным в смысле Хитчина. Поэтому для формы $d\omega$ определен оператор Хитчина $K_{d\omega}$. Показано, что $K_{d\omega}$ задает почти комплексную, либо почти паракомплексную структуру на G и пара $(\omega, d\omega)$ определяет псевдориманову метрику сигнатуры (2,4), или (3,3), которая является эйнштейновой для четырех из пяти рассматриваемых групп Ли. Это дает новые явные примеры многопараметрических семейств эйнштейновых метрик сигнатуры (3,3) и почти пара-комплексных структур на шестимерных ильмнообразиях, структурная группа которых редуцируется к $SL(3, \mathbf{R}) \subset SO(3,3)$. На каждой из рассматриваемых групп Ли найдены согласованные пары левоинвариантных форм (ω, Ω) , где в качестве 3-формы Ω выступает $d\omega$. Для них естественным образом выполнены определяющие свойства полу-плоских структур. $d\Omega = 0$ и $\omega \wedge \Omega = 0$. Поэтому полученные структуры являются также псевдоримановыми полу-плоскими. Мы приводим явный вид псевдо почти эрмитовых полу-плоских и паракомплексных полу-плоских структур. Все результаты имеют место и для соответствующих компактных шестимерных нильмнообразий.

Существование неподвижных прямых частичного отображения евклидова пространства E_5

Матиева Г.¹, Абдуллаева Ч.Х.²

¹*Ошский государственный университет*

²*Кыргызско-Узбекский университет*

В области $\Omega \subset E_5$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i)$ ($i, j, k = \overline{1,5}$) в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей \vec{e}_i образуют сеть Френе Σ_5 . На касательной к линии ω^5 сети Σ_5 инвариантным образом определяется точка $F_5^4 \in (X, \vec{e}_5)$. Когда точка X смещается в области Ω , точка F_5^4

описывает свою область Ω_5^4 в E_5 . Получается частичное отображение $f_5^4 : \Omega \rightarrow \Omega_5^4$ такое, что $f_5^4(X) = F_5^4$.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямые $(X, \vec{e}_1), (X, \vec{e}_2), (X, \vec{e}_3)$ являлись неподвижными в частичном отображении f_5^4 .

Рассмотрено частичное отображение $f_2^1 : \Omega \rightarrow \Omega_2^1$. Присоединим к Ω_2^1 области подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_2^1, \vec{a}_i)$, где векторы \vec{a}_i определены в работе [2].

В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе [1], найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы касательные прямые $(X, \vec{e}_5), (X, \vec{e}_4), (X, \vec{e}_3)$ к линиям $\omega^5, \omega^4, \omega^3$ (соответственно) циклической сети Френе являлись неподвижными прямыми частичного отображения f_2^1 .

Список литературы

1. Матиева Г. Об одном вырожденном частичном отображении пространства E_5 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева // American Scientific Journal, №5 – United States, 2016. – С. 49-53.
2. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. Ош, 2003. – С.212-219.

О почти комплексных структурах на $S^2 \times S^4$ *

Даурцева Н.А.

Кемеровский государственный университет

Известно, что только сферы размерности 2 и 6 допускают почти комплексную структуру. Существует короткий список почти комплексных произведений четномерных сфер, очевидным образом включающий в себя произведения $S^2 \times S^2, S^2 \times S^6 (S^6 \times S^2), S^6 \times S^6$, а также ровно одно нетривиальное произведение $S^2 \times S^4$. Пример почти комплексной структуры на $S^2 \times S^4$ дает структура Кэли на $S^2 \times S^4 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5$, которая в точке $(n_1, n_2) \in S^2 \times S^4$ определяется по формуле

* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-5913.2018.1.

$J(n_1, n_2)X = (n_1, n_2)X$. Свойства этой структуры изучались в работе [1], доказано, что она ортогональна относительно метрики, индуцированной вложением в \mathbb{R}^8 и не интегрируема.

Многообразие $S^2 \times S^4$ находится в списке 6-мерных почти комплексных многообразий, которые могут допускать приближенно келерову структуру координатности один относительно действия группы $SU(2) \times SU(2)$, определенного по формуле:

$(g_1, g_2): (p, q, t) \in S^2 \times f^4 \subset Im\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{R} \mapsto (g_1 p \bar{g}_1, g_1 q \bar{g}_2, t)$, для $(g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2)$. В работе [2] выдвинута гипотеза о том, что такой структуры не существует.

В данной работе изучаются различные действия координатности один группы $SU(2) \times SU(2)$ на произведении $S^2 \times S^4$ и свойства почти комплексных структур координатности один на данном многообразии.

Список литературы

1. Смоленцев Н.К. О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. 2004. Т.151. №4. С. 116-135.
2. Foscolo L., Haskins M. New G2-holonomy cones and exotic nearly Kahler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ // Ann. Math. 2017. V. 185:1. P. 59-130.

Об одном классе многообразий квадратичных элементов

Ким В.Б.

Кемеровский государственный университет

В 1963 г. В.С. Малаховский в [1] рассмотрел n -параметрическое многообразие алгебраических элементов k -го порядка в проективном пространстве P_n . Он обозначил его $(n, n, n)^k$. Используя внутренний фундаментальный объект этого многообразия, он, в частности, построил: 1) линейный однородный объект; б) основной ковариантный тензор; в) квазитензор и дал им характеристическую интерпретацию. В данной работе продолжено изучение многообразия $(n, n, n)^k$ для случая $k = 2$. Для удобства была произведена нормировка объектов, построенных В.С. Малаховским. С их помощью были построены тензор $B_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и продолженный фундаментальный объект Γ , задающий в пространстве P_n гиперквадрику Q . Рассмотрен класс многообразий квадратичных элементов, у ко-

того все квадратичные элементы лежат на неподвижной гиперквадрике. Этот класс назван конквадричным. Показано, что необходимым и достаточным условием конквадричности многообразия $(n, n, n)^2$ является равенство нулю тензора $B_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Дано безынтегральное представление конквадричного многообразия и исследованы его свойства. Показано, что все квадратичные элементы такого многообразия являются сечениями неподвижной гиперквадрики Q гиперплоскостями пространства. Заметим, что для двойственного образа – квадратичных конусов – аналогичная задача была решена Л.П. Сафаряном [2], а для кривых третьего порядка в случае $n = 3$ задача была решена автором [3]. Вопрос о том, справедлив ли аналогичный результат в общем случае для произвольного k остается открытым.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в n -мерном проективном пространстве. // Труды ТГУ, 1963, т. 168, с. 28–42
2. Сафарян Л.П.. О некоторых классах многообразий конусов второго порядка в P_n . Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 56, №2, с 82–90
3. Ким В.Б. О некоторых классах комплексов кубик в P_3 . // Кемеровский гос. ун-т, Кемерово, 1982, 17с., библиогр. 4назв. (рукопись деп. в ВИНТИ 18 февраля, 1982, № 734–82 деп)

Кратно транзитивные группы преобразований как феноменологически симметричные геометрии

Кыров В.А.

Горно-Алтайский государственный университет

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1, 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, задается на двумерном и $2n$ -мерном дифференцируемых многообразиях M и N невырожденной дифференцируемой функцией $f: M \times N \rightarrow R^2$ с открытой и плотной областью определения. Выполняется аксиома феноменологической симметрии, суть которой состоит в существовании функциональной связи между всеми значениями функции $f = (f^1, f^2)$ для произвольных двух точек множества M и $n+1$ точек множества N .

В работе [1] проведена полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1,2)$. С точностью до замены координат в и преобразования $\chi(f) \rightarrow f$ имеем только следующие ДФС ГДМ:

$$\begin{aligned}
 & f^1 = x + \xi, f^2 = y + \eta; \\
 & f^1 = (x + \xi)y, f^2 = (x + \xi)\eta; \\
 & f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \varepsilon = -1, 0, 1; \\
 & f^1 = x\xi + \mu, f^2 = x\eta + y\xi^\gamma + \nu, \gamma \neq 1; \\
 & f^1 = x\xi + \mu, f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu; \\
 & f^1 = x\xi + y\mu, f^2 = x\eta + y\nu; \\
 & \left. \begin{aligned}
 f^1 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(x + \rho) - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y + \tau)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2}, \\
 f^2 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(y + \tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x + \rho)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2};
 \end{aligned} \right\} \\
 & f^1 = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x + \rho}; \\
 & f^1 = x\xi + y\mu + \rho, f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \\
 & f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega}, f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}.
 \end{aligned}$$

Доказано, что приведенные выше ДФС ГДФ локально изотопны кратно транзитивным группам Ли преобразований двумерного многообразия.

Список литературы

1. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Барн. Гос. пед. Ун-т, 2003, 204 стр.

Геометрическое моделирование гипоидной передачи

Щёголева А.А.

Томский государственный университет

Гипоидные передачи характеризуются скрещивающимися осями вращения входной и выходной деталей. Такое расположение осей позволяет обеспечить плавность хода, бесшумность работы и повышенную нагрузочную способность механизма. В [1,2] рассматривались гипоидные передачи с перпендикулярными осями и с однополостными гиперболами вращения в качестве базовых поверхностей (*аксоидов*) этих деталей. В этой работе рассмотрен общий

случай – когда угол между осями задан в промежутке от 0 до $\pi/2$. Условие касания аксоидов по прямолинейной образующей сформулировано в [3, с.209, с.286] следующим образом: «две линейчатые поверхности могут тогда и только тогда соприкоснуться вдоль образующей, когда они вдоль этой образующей имеют одинаковый параметр распределения ([4, с 309].) В работе доказано, что параметр распределения однополостного гиперboloида вращения есть величина постоянная, равная одному из размеров гиперboloида. Получены точные аналитические уравнения поверхности зуба входной детали S , а поверхность зуба выходной детали найдена как огибающая семейства поверхностей S .

Список литературы

1. Щербаков Н.Р., Щеголева А.А. Касание однополостных гиперboloидов вращения как аксоидов гипоидной передачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2017, № 47, 37–42.
2. Щербаков Н.Р., Щеголева А.А. Моделирование поверхностей зубьев контактирующих деталей гипоидной передачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2017, № 48, 30–35.
3. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия – М.: Наука, 1981, С.285.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.,Л.: ГИТТЛ, 1950.428 с.

К вопросу о функциональных уравнениях на множество движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности

Богданова Р.А.

Горно-Алтайский государственный университет

Для симплицальных трехмерных геометрий, являющиеся геометриями максимальной подвижности, разрабатываются методы решения функциональных уравнений на множество движений.

Классификация трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности в 1988 г. была построена В.Х. Левом [1]. Она была воспроизведена в монографии [2] и дополнена В.А. Кыровым. В ней имеются как хорошо известные, так и малоизвестные геометрии. Для некоторых трехмерных геометрий найдены группы движения и их действия [3].

Трехмерные геометрии максимальной подвижности задаются на трехмерном многообразии \mathcal{M}_3 гладкой невырожденной метриче-

ской функцией $f: \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_3 \times \mathfrak{M}_3$, сопоставляющей паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ число $f(i, j) \in R$.

Определение: Гладкое локально обратимое преобразование, то есть локальный диффеоморфизм, многообразия

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda(x, y, z), \\ y' &= \sigma(x, y, z), \\ z' &= \tau(x, y, z), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y, z), \sigma(x, y, z), \tau(x, y, z))}{\partial(x, y, z)} \neq 0,$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad (1)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i, z_i)$, $\tau(i) = \tau(x_i, y_i, z_i)$.

Равенство (1) при известном координатном представлении функции $f(i, j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ есть функциональное уравнение на множество движений. Решая это уравнение, находим все возможные движения, совокупность которых является локальной группой преобразований многообразия. Отметим, что автором [4-6] были разработаны методы решения функциональных уравнений на множество движений двумерных «экзотических» геометрий максимальной подвижности и их двухточечных инвариантов.

Список литературы

1. Лев, В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.
2. Михайличенко, Г.Г. Математические основы и результаты Теории физических структур: Монография / Г.Г. Михайличенко. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. – 146 с.
3. Кыров В.А., Богданова Р.А. Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. матем. журнал. – 2018. – Т.9, № 2. – С. 412-421; Siberian Math. J. – 2018 – Vol. 59, No. 2. – pp. 323-331.
4. Богданова, Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т.12, № 4. – С. 12-22.
5. Богданова, Р.А. Группа движений симплицальной плоскости как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Вест. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2014. – № 4(30). – С. 5 - 13.

6 Богданова, Р.А. Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий / Р.А. Богданова. // Вест. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2016. – № 1(39). – С. 5.

Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ и топология»

Комбинированные оценки функции надежности

Абдурасулзода Д.¹, Губин В.Н.^{1,2}

¹Томский государственный университет,

²Томский политехнический университет

Для анализа надежности сложных технических устройств часто используются вероятностно-статистические модели. В данной работе для анализа вероятности безотказной работы системы используется функция надежности

$$S(t | x) = P(T_x \geq t) = 1 - F(t | x).$$

Так как на практике зачастую эта функция неизвестна, то естественная задача, которая решается статистическими методами, это построение оценки данной функции по наблюдениям, которые извлечены из распределения S . Среди непараметрических оценок для данной функции в теории надежности пользуется популярностью оценка Берана [1]:

$$\tilde{S}(t | x) = \prod_{i: Y_{(i)} \leq t} \left[1 - W_j(x; b_n) / \sum_{j=i}^n W_j(x; b_n) \right],$$

где $W_j(x; b_n)$ - весовые функции Надарая-Вотсона, вычисляемые с помощью ядерных функций. Для построения улучшенной оценки функции надежности в работе предлагается использовать комбинированную оценку

$$R(\lambda, x, t) = (1 - \lambda)\tilde{S}(t | x) + \lambda\varphi(x, t, \alpha),$$

где λ - весовой коэффициент, $\varphi(x, t, \alpha)$ априорная догадка о виде функции надежности, α - вектор регрессионных параметров. Весовой коэффициент подбирается таким образом, чтобы среднеквадратическое отклонение комбинированной оценки R от истинной функции надежности S было наименьшим. В этом случае весовой коэффициент в явном виде получить не удастся, поэтому для его оценки используется бутстрап-метод.

Список литературы

1. Beran R. Nonparametric regression with randomly censored survival data. / R. Beran //Technical report. Department of Statistics, University of California, Berkeley. – 1981.
2. Dmitriev Y.G., Koshkin G.M., Lukov V.Y.. Combined Identification Algorithms //Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Methods in Cybernetics and System Analysis - AMSA'2017, 18-22 september 2017 Krasnoyarsk : proceedings of the international workshop. Novosibirsk, 2017. P. 19-27.

Теорема об оценке для отображений с s -усредненной характеристикой и Q -отображения

Асанбеков У.К.

Томский государственный университет

Теорема 1. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с $K_{1,s}$ -усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство

$$M(\Gamma^*) \leq \inf_{\rho \in \Gamma} \int_D (\rho(x))^n K_1(x, f) d\sigma_x \quad (1)$$

где Γ – некоторое семейство кривых в области D , Γ^* – образ семейства Γ при отображении f .

Полученная оценка модуля (1), указывает на непосредственную связь класса отображений с s -усредненной характеристикой с теорией Q -гомеоморфизмов, интенсивно развивающейся в последние годы (ср. с определением ниже).

Замечание. В 2001 году О. Martiо предложил общую концепцию - теорию Q -гомеоморфизмов. Доказанная в теореме 5 [1] оценка указывает на непосредственную связь отображений с s -усредненной характеристикой и теорией Q -гомеоморфизмов [2].

Список литературы

1. Малютина А. Н., Елизарова М. А. Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображений с s -усредненной характеристикой //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – №. 1 (27).
2. Ryzanov V. et al. On equicontinuity of ring Q -mappings //Analysis and Mathematical Physics. – 2014. – Т. 4. – №. 1-2. – С. 145-156.

Полунепрерывность снизу отображений с s -усредненной характеристикой

Бердалиева М.А.

Томский государственный университет

Работа посвящена изучению свойств негомеоморфных пространственных отображений с s -усредненной характеристикой и обобщенной производной. Доказана теорема о полунепрерывности снизу для отображений с s -усредненной характеристикой.

Приводится пример, который показывают, что функция $||: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не имеет обычной производной, но обобщенная производная существует на всей вещественной прямой \mathbb{R} .

Теорема 1. Пусть $D_m \subset D^*$, $m = 0, 1, \dots$ – ограниченные области, $|D^*| \leq R < \infty$. Пусть $f_m: D \rightarrow D_m$, $m = 0, 1, \dots$ – последовательность отображений с s -усредненной характеристикой, $s \geq 1$ и последовательность f_m , $m = 0, 1, \dots$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f .

Тогда

$$f \in W_n^1(D), K_{O,s}^*(f) = \left(\int_D K_O^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} K_{O,s}^*(f_m).$$

Список литературы

1. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск: 1979. –39 с. (Препринт СО АН СССР. Ин-т математики), для отображений с искажением, ограниченным в среднем – С.М. Борчук.
2. Борчук С.М., Кругликов В.И. Отображения с искажением, ограниченным в среднем. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. – № 10. – С. 6–7.
3. Соболев С.Л.. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.:Наука. 1988.–С. 336.
4. Malyutina A., Elizarova M. Mappings with s -averaged characteristic. Definition and properties. LAP LAMBER Academic Publishing.2013. 121 p. ISBN: 978-3-8484-1319-5.

Свободные n -периодические топологические группы*

Гензе Л.В.

Томский государственный университет

В работе [1] введено понятие свободной абелевой n -периодической топологической группы $A^{[n]}(X)$ тихоновского пространства X и доказано существование такой группы.

Многие свойства групп $A^{[n]}(X)$ аналогичны соответствующим свойствам свободных абелевых топологических групп $A(X)$. К числу таких свойств можно отнести некоторые соотношения между кардинальными инвариантами пространства X и свободной группы этого пространства, описание топологии свободной группы в случае компактного пространства X , соотношение между размерностью пространства X и его свободной группы и др. В тоже время некоторые свойства свободных абелевых n -периодических топологических групп $A^{[n]}(X)$ могут существенно отличаться от свойств свободных абелевых топологических групп $A(X)$. Например, у этих групп различается топологическая изоморфная классификация в том случае, когда X – это начальный отрезок ординалов. По-другому ведут себя группы $A^{[n]}(X)$ и по отношению к P -рефлексивности (абелева топологическая группа G называется P -рефлексивной, если естественный гомоморфизм группы G во вторую группу характеров G^{\wedge} является топологическим изоморфизмом).

Данный доклад будет посвящен обзору результатов, касающихся групп $A^{[n]}(X)$ и сравнению этих свойств со свойствами групп $A(X)$.

Список литературы

1. Гензе Л.В. Свободные n -периодические топологические группы // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 23–28.
2. Pestov V. Free abelian topological groups and the Pontryagin–van Kampen duality // Bull. Austral. Math. Soc. 1995. Vol. 52. P. 297–311.
3. Galindo J., Hernandez S. Pontryagin–van Kampen reflexivity for free Abelian topological groups // Forum Math. 1999. № 11. P. 399–415.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17–51–18051)

О классификации пространств непрерывных функций на счетных метрических пространствах в топологии поточечной сходимости*

Гулько С.П., Каргин Д.И., Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

В докладе будут рассмотрены вопросы классификации пространств $C_p(X)$ всех непрерывных вещественных функций на счетных метрических пространствах, наделенных топологией поточечной сходимости. Будут рассмотрены два случая: 1) классификация $C_p(X)$ как топологических векторных пространств, 2) классификация $C_p(X)$ как равномерных пространств.

Выделим следующие основные типы пространств: $s = \mathbb{R}^\infty$ – пространство всех вещественных последовательностей, c_0 – пространство всех последовательностей, сходящихся к нулю (наделенное поточечной топологией) и их произведения.

Теорема 1. Пространства s , c_0 , $s \times c_0$, $s \times s \times \dots_{c_0}$,

$c_0 \times c_0 \times \dots_s, \dots$ не являются попарно линейно гомеоморфными. Более того, пространства из этого ряда с большим номером нельзя вложить в пространства с меньшим номером как дополняемое подпространство.

Теорема 2. Каждое пространство $C_p(X)$ для счетного метрического пространства X равномерно гомеоморфно одному из пространств: s , c_0 , $s \times c_0$, $s \times s \times \dots_{c_0}$, $c_0 \times c_0 \times \dots_s, \dots$.

Список литературы

1. Gul'ko S.P., The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to c_0 // Bull. Pol. Acad. sci. Math. 1988. - V.36. - no.5-6. – P.391-396.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-51-18051)

Спектр частот Σ -оболочки двух точек*

Гулько С.П., Тыдыков К.А.

Томский государственный университет

В обобщенном канторовом дисконтинууме $X = \{0,1\}^\tau$, где τ – несчетный регулярный кардинал, рассмотрим $\Sigma(x) = \{y \in \{0,1\}^\tau; |\{i; y_i \neq x_i\}| \leq \aleph_0\}$ – обычную Σ -оболочку точки x . Пусть 0 и 1 – точки в X , у которых все координаты равны 0 и 1 соответственно. Пусть $Y = \Sigma(0) \cup \Sigma(1)$. Хотя по отдельности теснота пространств $\Sigma(0)$ и $\Sigma(1)$ счетна, у пространства Y такой не является.

Так как X является компактом, то по предложению 2.9 [1] мы имеем

$$Sp(X) = \lambda; \lambda \geq t(X) = \lambda; \lambda \geq \tau .$$

По предложению 2.5 [1] мы получаем

$$Sp(X) \subset Sp(Y) .$$

Пространство X является τ – расширением Y , т.к. X компактно и для каждого подмножества A мощности $\leq \tau$ его замыкание в X компактно. По теореме 3.9 [1] $\tau \notin Sp(X)$ тогда и только тогда, когда существует τ – расширение X такое, что $t(Y, X) > \tau$. В частности, мы получаем следующее утверждение.

Теорема. Если $\tau = \aleph_n$, то кардиналы $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{n-1}$ не принадлежат $Sp(Y)$.

Список литературы

1. Архангельский А. В., Спектр частот топологического пространства и операция произведения. Труды ММО. 1979, том 40, 171-206.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-51-18051)

О последовательном оценивании авторегрессионных процессов

Емельянова Т.В.¹, Зиновьева О.С.²

¹*Томский государственный университет,*
²*Бременский университет*

Рассматривается задача оценивания параметров регрессионной модели вида $dX_t = (Y_1\theta_1 + \dots + Y_p\theta_p)dt + dW_t$ по наблюдениям процесса X_t на промежутке $[0; T]$. Предлагается последовательная процедура оценивания вектора неизвестных параметров со специальными правилами остановки наблюдений, определяемыми с помощью модификаций выборочной информационной матрицы Фишера. Показано, что построенные таким образом оценки вектора неизвестных параметров имеют неасимптотическое нормальное определение.

Список литературы

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16, в. 2. С. 394-396.
3. Борисов В.З., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров дискретных процессов. // Автоматика и телемеханика. 1977. № 10. С. 58-64.

Непараметрический метод сегментации временных рядов

Емельянова Т.В., Шерстобитова А.О.

Томский государственный университет

В задачах обработки временных рядов часто встречается ситуация, когда временной ряд порожден различными механизмами генерации, однако у исследователя нет никакой априорной информации об этих механизмах. Для извлечения адекватной информации из массива данных необходима предварительная сегментация ряда на однородные подмассивы данных, без чего нельзя строить математические модели, оценивать параметры и т.д.

В конце 1970-х годов была высказана идея [2] о том, что задача обнаружения изменений в любой вероятностной характеристике случайного процесса может быть сведена к задаче обнаружения из-

менений математического ожиданий в специальном диагностическом процессе, конструирующемся в ходе реализации процесса по исходным данным. Эта идея позволяет обнаруживать изменения любых вероятностных характеристик и осуществлять сегментацию исходного временного ряда [1].

Рассматривается проблема разделения временных рядов произвольной природы X_t (стохастических, детерминированных или смешанных) на сегменты, порожденные одним механизмом, а также обнаружения момента смены τ одного механизма генерации другим. На основе параметров сложности рассматривается новая методология сегментации временных рядов, которая не требует каких-либо априорных знаний о механизмах их генерации.

Список литературы

1. Дарховский Б.С., Пирятинская А. Новый подход к проблеме сегментации временных рядов произвольной природы //Тр. МИАН. – 2014. – т. 287.– С. 61-74
2. Brodsky V.E., Darkhovsky B. S. Non-parametric statistical diagnosis: Problems and methods. Dordrecht: Kluwer, 2000.

О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций, заданных на разреженных компактах, с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах*

Игнаев Э.Л., Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

Пусть K – регулярное топологическое пространство, $A \subset K$ – всюду плотное подмножество. Следуя [1] через $C_p(A|K)$ обозначим линейное подпространство в $C_p(A)$, состоящее из тех функций $x \in C_p(A)$, для которых $x = y|_A$ для некоторой функции $y \in C_p(K)$.

Для данных пространств получена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть K – метрический компакт, A и B – всюду плотные подмножества в K такие, что $|K \setminus A| = m < n = |K \setminus B|$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда пространства $C_p(A|K)$ и $C_p(B|K)$ не являются линейно гомеоморфными.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-51-18051)

Пусть $s = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$, где $R_i = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $c \subset s$ – подпространство всех сходящихся последовательностей, $c_0 \subset s$ – подпространство всех сходящихся к нулю последовательностей. Тогда верны следующие следствия:

Следствие 1. Пространства c и $\underbrace{c \times c \times \dots \times c}_n$, $n > 1$, не являются линейно гомеоморфными.

Следствие 2. Пространства c_0 и c не являются линейно гомеоморфными, но пространства $c_0 \times c$ и c линейно гомеоморфны.

Следствие 3. Пространство c дополняемо не вкладывается в пространство c_0 , но пространство c_0 дополняемо вкладывается в c .

Утверждение о том, что пространства c и c_0 не являются линейно гомеоморфными было доказано в статье Т. Добровольского и В. Мартишевского [2].

Список литературы

1. Архангельский А.А. Топологические пространства функций. М.: Издательство МГУ – 1989 – С. 222.
2. Dobrowolski T., Marciszewski W. Classification of function spaces with the pointwise topology determined by a countable dense set //Fundamenta Mathematicae. – 1995. – Т. 148. – №. 1. – С. 35-62.

Акцессорные параметры в дифференциальном уравнении Шварца

Колесников И.А.

Томский государственный университет

Решается задача построения конформного отображения комплексной полуплоскости на круговой многоугольник с помощью дифференциального уравнения Шварца. Проблема определения параметров уравнения Шварца (прообразов вершин многоугольника и акцессорных параметров) решается с помощью обобщения метода П.П. Куфарева [2], полученного Б.Г. Байбариним [1]. Метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца, основанный на дифференциальном уравнении Левнера, позволяет свести задачу определения прообразов вершин многоугольника к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе уточняется обобщение метода П.П. Куфарева, полученное Б.Г. Байбариним, метод применяется для построения конкретных отображений.

Список литературы

1. Байбарин Б.Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функций конформно отображающих полуплоскость на круговые области. Труды Томского государственного университета, 1966, Т. 189, с.123-136
2. Труды П.П. Куфарова. К 100-летию со дня рождения. Под общей редакцией И.А. Александрова. Томск: изд-во НТЛ. 2009.

Компакты в пространствах $C_p(K, S)$

Королев Д.И.

Томский государственный университет

В данном докладе рассматривается свойство ангельскости пространств $C_p(K, S)$. Доказывается аналог теоремы Гротендика для этих пространств. При этом доказанная теорема является следствием оригинального результата.

Теорема 1. Пусть K — компактное пространство, S — прямая Зоргенфрея, A — относительно счетно-компактное множество в $C_p(K, S)$ и $\psi \in \overline{A}^{S^K}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ и $f \in C_p(K, S)$ такие, что $f = \psi$ и f является пределом последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в $C_p(K, S)$.

Теорема 2. Пусть K — компактное пространство, S — прямая Зоргенфрея, A — относительно счетно-компактное множество в $C_p(K, S)$. Тогда \overline{A} — компактное множество.

Из этих двух теорем следует, что если K — компактное пространство, и S — прямая Зоргенфрея, то пространство $C_p(K, S)$ является ангельским.

Список литературы

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Издательство Московского университета, 1989.
3. Pryce, J. D. A Device Of R. J. Whitley's Applied to Pointwise Compactness in Spaces of Continuous Functions// Proceedings of the London Mathematical Society. (1971). V. s3-23. P 532-546. doi:10.1112/plms/s3-23.3.532

Представление линейного периодического функционала в пространстве Соболева

Корытов И.В.

Томский политехнический университет

Работа посвящена представлению периодического функционала в пространстве Соболева и является продолжением исследований по установлению общего вида функционалов в непериодических и вевсовых пространствах [1, 2]. В реализациях гильбертовых пространств представление линейного функционала выводится на основании теоремы Рисса через скалярное произведение. В негильбертовых пространствах, где невозможно ввести скалярное произведение, представление сходной структуры также имеет место.

Рассмотрено негильбертово пространство Соболева периодических функций с нормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{(m)}} = \left(\int_Q \sum_{k=0}^m C_m^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где φ – функция n переменных, $Q = \{x \in \mathbf{R}_n, 0 \leq x_j < 1, j = 1, \dots, n\}$, C_m^k – биномиальный коэффициент, α – мультииндекс ($|\alpha| \leq m$).

Теорема. Для функции с единичным периодом по каждой переменной линейный функционал имеет представление

$$\langle f, \varphi \rangle = c_0 c'_0 + \int \sum_{k=0}^m C_m^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{D^\alpha e^{-2\pi i \beta x}}{(1 + |2\pi \beta|^2)^m} \cdot c_{-\beta} + \kappa_\alpha \right) D^\alpha \varphi(x) dx$$

при следующих ограничениях: $pm > n$ (все функции непрерывны), $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Здесь $c_\beta = \langle f, e^{-2\pi i \beta x} \rangle$, $c'_\beta = \langle e^{2\pi i \beta x}, \varphi \rangle$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j = \pm 1, \pm 2, \dots$, $c_0 = \langle f, 1 \rangle$, $c'_0 = \langle 1, \varphi \rangle$, $\kappa_0 = 0$, $\kappa_\alpha \neq 0$ при всех остальных наборах мультииндекса. При этом

$$\sum_{\beta \neq 0} \frac{D^\alpha e^{-2\pi i \beta x}}{(1 + |2\pi \beta|^2)^m} \cdot c_{-\beta} + \kappa_\alpha \in \tilde{L}_q(Q) \forall \alpha : |\alpha| \leq m.$$

Список литературы

1. Корытов И.В. Представление функционала погрешности кубатурной формулы в вевсовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, Специальный выпуск. – С. 59–66.

2. Корытов И.В. Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, № 2. – С. 21–25.

Функционалы с конечным носителем на 0-достаточных семействах функций

Лазарев В.Р.

Томский государственный университет

В данной работе понятие 0-достаточного семейства функций, введённое в [1], обобщается путём отказа от требования непрерывности функций. Полученное понятие включает в себя как частные случаи ряд известных объектов.

Предложение 1. (а) Пространства \mathbb{R}^X , $C_p(X)$, Σ - и Σ_* -произведения вещественных прямых являются 0-достаточными семействами в \mathbb{R}^X ;

(б) Если Y замкнуто в X , то пространство сужений на $X \setminus Y$ функций из $C_p(X|Y)$ является 0-достаточным в $\mathbb{R}^{X \setminus Y}$.

Полезен также следующий факт.

Предложение 2. Если семейство функций $A \subset \mathbb{R}^X$ является 0-достаточным то его аддитивная оболочка всюду плотна в \mathbb{R}^X .

Определённые по-новому 0-достаточные семейства с прежним успехом могут служить областью определения для функционалов с конечным носителем (определение последних также см. в [1]). Поэтому можно выделить класс таких гомеоморфизмов $h: A \rightarrow B$, где A, B – 0-достаточные семейства в $\mathbb{R}^X, \mathbb{R}^Y$ соответственно, что образы $h^*(Y), (h^{-1})^*(X)$ состоят из функционалов с конечным носителем. Этот класс обозначается символом (\hat{X}_A, \hat{Y}_B) .

Теорема. Существуют тихоновские пространства X, Y такие, что пространства $C_p(X), C_p(Y)$ не линейно гомеоморфны, но существует гомеоморфизм $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ класса $(\hat{X}_{C_p(X)}, \hat{Y}_{C_p(Y)})$.

Приведённая теорема даёт ответ на вопрос 5.3 из [1].

Список литературы

1. Lazarev V. Homeomorphisms of function spaces and topological dimension of domains // Serdica Math. J. 2017. № 43. P. 79–92

Построение элементов области сумм ряда на основе направлений расходимости

Лазарева Е.Г.

Томский государственный университет

Точка a на сфере $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ в банаховом пространстве X называется *направлением расходимости* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, если для каждой окрестности $U(a) \subset S$ точки a бесконечно множество $N_{U(a)} = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{x_n}{\|x_n\|} \in U(a) \right\}$ и ряд $\sum_{n \in N_{U(a)}} \|x_n\|$ расходится. [1]

Точка x принадлежит *области сумм* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ тогда и только тогда, когда существует биекция $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$. Следуя [2], обозначим область сумм ряда через $\text{SR}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$. Вопрос об описании области сумм произвольного ряда остается открытым.

Лемма. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$, a – направление расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Тогда для любых $n, l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$ найдется множество $K = \{k_1, \dots, k_m\} \subset \mathbb{N}$ такое, что: $l < \min K$, $\|x_k\| \leq \delta \forall k \in K$,

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k \in K} \|x_k\| < \frac{1}{n} + \|x_{k_m}\|, \left\| \sum_{k \in K} x_k - \frac{a}{n} \right\| < \|x_{k_m}\| + \left(\frac{1}{n} + \|x_{k_m}\| \right) \cdot \varepsilon$$

Теорема. Если $a_i, i = 1, \dots, k$ – направления расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$, то $\left\{ x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot a_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{SR}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$.

Следствие. Пусть $a_i, i = 1, \dots, k$ – направления расходимости ряда, полученного из $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ группировкой членов. Тогда

$$\left\{ x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot a_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{SR}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Список литературы

1. Banach T. A simple inductive proof of Levy-Steinitz theorem. [Электронный ресурс] URL: <https://arxiv.org/abs/1711.04136> (Дата обращения 27.05.2018г.)
2. Kadets M.I., Kadets V.M. Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence. Birkhauser Verlag, Basel, 1997.

Некоторые дифференциальные свойства экстремального пространственного негомеоморфного отображения с s -усредненной характеристикой

Малютина А.Н., Алипова К.А.

Томский государственный университет

Пусть D и D^* – ограниченные области в R^n , $n \geq 3$. Отображение $f : D \rightarrow R^n$ – с s -усредненной характеристикой, т.е. открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W_{n,loc}^1 D$, и $J x, f$ п.в. сохраняет знак, например $J x, f > 0$ и существуют константы $Q_{l,s}, Q_{l,s}^*$

такая, что ограничены интегралы $Q_s(f) = \left(\frac{1}{|D|} \int_D Q_{l,s}(x, f) dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq Q_{l,s}$,

$$Q_s^*(f) = \left(\frac{1}{|D^*|} \int_D Q_{l,s}^*(x, f) J(x, f) dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq Q_{l,s}^* \text{ см. например [1]}$$

Обозначим $Q_{l,s}(D, D^*)$, $Q_{l,s}^*(D, D^*)$ классы отображений с $Q_{l,s}$, $Q_{l,s}^*$ – усредненной характеристикой и таких, что $Q_{l,s} < \infty$, $Q_{l,s}^* < \infty$ соответственно. Отображение $f : D \rightarrow R^n$ – с s -усредненной характеристикой называется *экстремальным* в некотором классе $G D, D^*$ из $Q_{l,s}(D, D^*)$ если $f \in G D, D^*$ и $Q_s(f) \leq Q_s(g)$ ($Q_s^*(f) \leq Q_s^*(g)$) для всех $g \in G D, D^*$.

Теорема 1. Пусть $s \geq 2n - 2^{-1}$ и $f : D \rightarrow D^*$ есть отображение с s -усредненной характеристикой экстремальное отображение в клас-

се $Q_{t,s}(D, D^*)$. Тогда $f \in W_2^2 D'$ для любой подобласти D' такой, что $J_x f > 0$ на замыкании \bar{D}' и $\bar{D}' \subset D$.

Список литературы

1. Елизарова М.А., Малютина А.Н. Отображения с s -усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 с. ISBN 978-3-8484-1319-5.

Топологические пространства функций с разреженно-открытой топологией

Мусаев Т.О.

Томский государственный университет

В работе рассматривается пространство $C_\lambda(X)$ непрерывных функций, заданных на тихоновском пространстве X , с множествонно-открытой топологией, порожденной семейством λ разреженных C -компактных подмножеств пространства X . Множества вида $[A, U] = \{f \in C(X) / f(A) \subset U, \text{ где } A \in \lambda, U \text{ открыто в } R\}$ образуют предбазу такой топологии.

Под разреженным множеством будем понимать множество, каждое подмножество которого имеет изолированную в этом подмножестве точку. А под C -компактными множествами – множества, которые отображаются в компакт любой непрерывной вещественнозначной функцией.

Установлено, что семейство λ разреженных C -компактных подмножеств X обладает следующими свойствами:

(а) Семейство λ замкнуто относительно объединений; (б) Семейство λ является π -сетью; (в) $\lambda = \lambda(C)$;

По теореме 3.3 из статьи [1] $C_\lambda(X)$ — хаусдорфово топологическое векторное пространство.

Список литературы

1. Osipov A. V. Topological–algebraic properties of function spaces with set-open topologies //Topology and its Applications. – 2012. – Т.159. – №. 3. – С. 800-805.

Граничная задача для уравнения гиперболического типа

Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А.

Бакинский государственный университет

Излагаемая работа посвящена некоторым граничным задачам для уравнения струны в квадрате. Целью является показать справедливость метода решения, обычно применяемого для уравнения эллиптического типа.

Итак, рассмотрим уравнение:

$$lu(x) \equiv \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in D \subset R^2, \quad (1)$$

где $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}$ - квадрат на вещественной плоскости R^2 . Применяя вторую формулу Грина [1], [2] к решению уравнения (1) и фундаментальному решению уравнения (1), получим следующее утверждение:

Теорема. Граничные значения всякого решения уравнения (1), определенные в области D , удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0, x_2=\xi_2} - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0, x_1=\xi_2} + \frac{du(0, \xi_2)}{d\xi_2} - \frac{du(\xi_2, 0)}{d\xi_2} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=1, x_2=1-\xi_2} + \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0, x_1=\xi_2} - \frac{du(\xi_2, 0)}{d\xi_2} + \frac{du(1, 1-\xi_2)}{d\xi_2} = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=1, x_1=1-\xi_2} - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=1, x_1=\xi_2} + \frac{du(\xi_2, 0)}{d\xi_2} - 2 \frac{du(0, \xi_2)}{d\xi_2} + \frac{du(1-\xi_2, 1)}{d\xi_2} = 0, \quad (4)$$

$$u(\xi_2, 0) - u(0, \xi_2) - u(1, 1-\xi_2) + u(1-\xi_2, 1) = 0.$$

Замечание. Некорректность [3], [4] задачи Дирихле для уравнения (1) легко следует из последнего соотношения (4) приведенной теоремы.

Список литературы

1. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1988.
2. Курант Р., Уравнения с частными производными, Мир, 1964.
3. Тихонов А.Н., Лаврентьев М.М. Корректно поставленные задачи. Дифференциальные уравнения с частными производными, Наука, Москва, 1970, С. 224-236.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики, 2002.

Первая теорема об искажении модулей при отображениях с s -усредненной характеристикой

Новик А.В., Малютина А.Н.

Томский государственный университет

Определение 1. Сферический модуль семейства Γ определим по формуле $M_\alpha = \inf \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$ где $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, а \inf берется над

классом всевозможных метрик $p \wedge \Gamma$ [1].

Определение 2. Отображение $f : D \rightarrow R^n$ называется отображением с $K_{I,s}$ усредненной характеристикой, если

1) $f \in W_{n,loc}^1(D)$;

2) Существует постоянная $K_{I,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{I,s}(f) = \left(\int_D K_I^s(x, f) d\sigma_x \right)^s \leq K_{I,s} \cdot [2]$$

В следующей теореме мы докажем оценку искажения модулей семейств кривых, чтобы получить геометрическое определение отображения с $K_{I,s}$ -усредненной характеристикой.

Теорема 1. Пусть D -область в R^n , f — отображение с $K_{I,s}$ -усредненной характеристикой. Пусть A — борелевское множество в D такое, что $N(f, A) < \infty$. Для любого семейства кривых $\Gamma \subset A$ выполнено неравенство

$$M^{s-1}(\Gamma) \leq N^s(f, A) (K_{I,s})^{s-1} C(n, A) M_{\frac{ns}{s-1}}^s(f\Gamma).$$

Список литературы

1. Новик А., Малютина А.Н. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, её приложений и смежные вопросы // Материалы Тринадцатой Казанской летней научной школы - конференции. - Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. -Т.54 – 420 с.
2. Elizarova M., Malyutina A. Mappings with s -averaged characteristic. Definition and properties. LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2013.

Свободное липшицево пространство $F(l_\infty)$

Островик М.О.

Томский государственный университет

Пусть X – метрическое пространство, и пусть $Lip_0(X)$ – пространство всех вещественнозначных липшицевых функций на X , которые переводят фиксированную точку $e \in X$ в ноль. Пусть $x \in X$, определим функционал $\delta: X \rightarrow Lip_0(X)^*$ следующим образом: $\delta_x(f) = f(x)$ для каждого $f \in Lip_0(X)$. Важно заметить, что δ является изометрическим вложением X в подпространство пространства $Lip_0(X)^*$.

Определение 1. Свободное пространство Липшица $F(X)$ на X – это замкнутое подпространство для сопряженного пространства $Lip_0(X)^*$, равное замыканию линейной оболочки функционалов δ_x , то есть $F(X) = \overline{\text{sp}} \delta_x; x \in X$.

Пусть l_∞ – пространство всех ограниченных последовательностей. Рассматриваются $Lip_0(l_\infty)$ – пространство липшицевых функций на l_∞ и $F(l_\infty)$ – свободное липшицево пространство на l_∞ . В докладе будут освещены важные свойства $Lip_0(l_\infty)$ и $F(l_\infty)$.

В случае, если X является сепарабельным пространством верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть X – сепарабельное пространство. Тогда $F(X)$ изометрично вкладывается в $F(l_\infty)$.

Список литературы

1. Godard A. Tree metrics and their Lipschitz-free spaces //Proceedings of the American Mathematical Society. – 2010. – Т. 138. – №. 12. – С. 4311-4320.
2. Godefroy G. A survey on Lipschitz-free Banach spaces //Commentationes Mathematicae. – 2016. – Т. 55. – №. 2. – С. 89-118.
3. Godefroy G., Kalton N. J. Lipschitz-free Banach spaces //Studia Mathematica. – 2003. – Т. 159. – С. 121-141.
4. Weaver, Nik. Lipschitz algebras / Nik Weaver.– USA: World Scientific Publishing Co, 1999.– 223 p.

Улучшенное оценивание функции регрессии с шумами Леви по неполным данным*

Повзун М.А., Пчелинцев Е.А.

Томский государственный университет

Для моделирования процессов при обработке сигналов часто используют стохастические дифференциальные уравнения. В данной работе рассматривается регрессионная модель вида:

$$dy_t = S(t)dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n \quad (1)$$

где S – неизвестная функция, $S \in L_2[0,1]$, ξ_t – шум, моделируемый процессом Леви [1]. Задача состоит в том, чтобы оценить функцию $S(t)$ по дискретным наблюдениям y_{t_j} , $0 \leq j \leq np$ процесса

y_{t_j} , $t_j \geq 0$. Предлагается оценка вида $S^*(t) = \sum_{j=1}^{np} \lambda(j) \theta_{j,p}^* \varphi_j(t)$, где $\lambda(j)$ – весовые коэффициенты, $\varphi_{j \geq 1}$ – тригонометрический базис, а $\theta_{j,p}^*$ – улучшенные оценки коэффициентов Фурье, предложенные в [2].

В работе разработана процедура выбора модели на основе улучшенных взвешенных оценок МНК. Доказано, что предложенная процедура имеет более высокую среднеквадратическую точность, чем процедура, построенная на основе взвешенных оценок МНК. Получено точное оракульное неравенство для среднеквадратического и робастного рисков [1]. Изучены асимптотические свойства модели.

Список литературы

1. Pchelintsev E.A., Pergamenschikov S.M. Oracle inequalities for the stochastic differential equations // Statistical inference for stochastic processes. 2018. V. 21. № 2. P. 469–483.
2. Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A., Pergamenschikov S.M. Nonasymptotic sharp oracle inequality for the improved model selection procedures for the adaptive nonparametric signal estimation problem // Communications. Scientific Letters of the University of Zilina. 2018. V. 20. № 1. P. 72–76.

* Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, проект № 2.3208.2017/4.6.

Оценки собственных чисел p -Лапласиана для краевой задачи Неймана в невыпуклых областях*

Пчелинцев В.А.

Томский политехнический университет

В данной работе исследуются нижние оценки первых нетривиальных собственных чисел задачи Неймана для вырожденного оператора p -Лапласа, $p > 2$, в конформных регулярных областях. Класс конформных регулярных областей включает липшицевые области и некоторые области с фрактальными границами, для которых размерность Хаусдорфа может быть любым числом из промежутка $[1, 2)$.

Основная техника исследований базируется на геометрической теории операторов композиции для пространств Соболева [1]. На этом пути доказана [2]:

Теорема. Пусть $\varphi: D \rightarrow \Omega$ – конформное отображение единичного круга D на конформную α -регулярную область Ω . Тогда для любого $p > 2$, справедливо следующие неравенство:

$$\frac{1}{\mu_1(\Omega)} \leq C_p \cdot |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} \cdot \|\varphi'\|_{L_\alpha(D)}^2,$$

где $|\Omega|$ – мера области Ω и

$$C_p = 2^p \pi^{\frac{\alpha-2}{\alpha} \frac{p}{2}} \inf_{q \in [1, 2]} \left(\frac{1-\delta}{1/2-\delta} \right)^{(1-\delta)p}, \quad \delta = \frac{1}{q} - \frac{\alpha-2}{p\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

Список литературы

1. Ухлов А.Д. Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 185–192.
2. Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A. On the first eigenvalue of the degenerate p -Laplace operator in non-convex domains // Integral Equ. Oper. Theory. 2018. 90:43.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-31-00011.

Задача об экстремальных управлениях некоторого функционала

Садритдинова Г.Д.

Томский государственный университет

Рассматривается функционал $I = \arg \frac{f(z)}{z}$ на классе S_p p -симметричных функций, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Параметрическим методом находятся управляющие функции в уравнении Левнера, приводящие к экстремальным значениям функционала. Проводится технически сложное интегрирование уравнения Левнера с найденными управляющими функциями.

Список литературы

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука. 1976. 344 с.
2. Александров И.А., Александров А.И. Экстремальные управляющие функции в уравнении Левнера в теореме вращения // Доклады РАН. 2000. Т. 371. № 1. С. 7-9.

О граничном поведении монотонных отображений класса $L_n^1(B^n)$

Соколов Б.В.

Томский государственный университет

Пусть R^n n -мерное евклидово пространство, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, B^n — шар $|x| < 1$.

Через $L_n^1(B^n)$ обозначим совокупность ACL -отображений $f \equiv \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ шара $B \subset R^n$, удовлетворяющих условию:

$$I(f) \equiv \int_B \Lambda^n(f, x) dx < \infty,$$

$$\text{где } \Lambda(f, x) = \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

В данной работе с помощью неравенства типа «принципа длины и площади» (см. [1, 2]) доказывается равномерная непрерывность монотонных отображений класса $L_n^1(B^n)$ в шаре B^n по отношению к гиперболической метрике ρ шара B^n . Из этого факта следует, что монотонные отображения $f \in L_n^1(B)$ имеют непрерывные продолжения f^* на бикомпактное расширение $\nu^\rho B^n$ (см.[3]), отвечающее «естественной близости» в метрическом пространстве (B^n, ρ) .

Список литературы

1. Овчинников И.С., Суворов Г.Д. Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. мат. журнал 1965 .Т.6, №6.С. 1292-1314.
2. Суворов Г.Д. Обобщенный "принцип длины и площади" в теории отображений. – Киев: Наукова Думка, 1985.
3. Смирнов Ю.М. О пространствах близости // Матем. сб. 1952.Т.31(73), №3. С. 543-574.

О функциях первого класса Бэра на стрелке и ее модификациях

Сухачева Е.С.

Томский государственный университет

Пусть X – топологическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией первого класса Бэра*, если существует последовательность непрерывных функций f_n $_{n=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к функции f на множестве X . Множество всех функций первого класса Бэра обозначается $B_1(X)$.

Для функций первого класса Бэра заданных на метризуемых пространствах хорошо известны критерии Лебега и Бэра. В данной работе получены аналоги теорем Лебега и Бэра для функций первого класса Бэра, заданных на более широком классе пространств, а именно на пространствах, являющихся одновременно наследственно линделефовыми и наследственно бэровскими, но не обязательно метризуемых.

Теорема 1. Пусть X – наследственно линделефово пространство и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $f \in B_1(X)$ тогда и только тогда, ко-

гда для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ .

Теорема 2. Пусть пространство X наследственно линделефово и наследственно бэровское. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Символом S_A обозначим топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом: $[x, x + \varepsilon); \varepsilon > 0$, если $x \in A$; $(x - \varepsilon, x]; \varepsilon > 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Если $A = \emptyset$, то пространство S_\emptyset называется прямой Зоргенфрея. Для любого $A \subset \mathbb{R}$, также определено пространство Хаттори $H(A)$. Это множество \mathbb{R} , в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом: $(x - \varepsilon, x + \varepsilon); \varepsilon > 0$, если $x \in A$; $[x, x + \varepsilon); \varepsilon > 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Пространства S_A и $H(A)$ являются наследственно бэровскими и наследственно линделефовыми и, следовательно, удовлетворяют условиям теорем 1-2.

Компактификации прямой Зоргенфрея*

Сухачева Е.С., Федоров А.А.

Томский государственный университет

Символом S обозначается прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), представляющая собой множество вещественных чисел \mathbb{R} , топология в котором порождена базой $(a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Напомним, что пара Y, c , где Y – компакт, а $c: X \rightarrow Y$ – гомеоморфное вложение пространства X в компакт Y , такое, что $\overline{c(X)} = Y$, называется компактификацией пространства X .

Утверждение 1. Если (Y, c) — компактификация пространства S , то $|Y \setminus c(S)| > \aleph_0$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-51-18051)

Пространство $D = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, где $C_0 = (x, 0); 0 < x \leq 1$ и $C_1 = (x, 1); 0 \leq x < 1$ с топологией, порожденной базой, состоящей из множеств вида $\left\{ (x, i) \in D; x_0 - \frac{1}{k} < x < x_0, i = \overline{0, 1} \right\} \cup (x_0, 0)$, где $0 < x_0 \leq 1$ и $k \in \mathbb{N}$, а также из множеств вида $\left\{ (x, i) \in D; x_0 < x < x_0 + \frac{1}{k}, i = \overline{0, 1} \right\} \cup (x_0, 1)$, где $0 \leq x_0 < 1$ и $k \in \mathbb{N}$, называют две стрелки. Известно, что континуальное пространство D является примером компактификации прямой Зоргенфрея [1].

Теорема 2. Если (Y, c) — компактификация пространства S , то $|Y \setminus c(S)| \geq 2^{\aleph_0}$.

Список литературы

1. Энгелькинг Р. Общая топология. – Мир, 1986.

Общий вид функционалов на пространствах $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S \times [1, \alpha])$

Трофименко Н.Н.

Томский государственный университет

Рассмотрим пространства непрерывных функций $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S \times [1, \alpha])$ в топологии компактной сходимости. Здесь S – прямая Зоргенфрея, S_α – «длинная прямая Зоргенфрея», α – произвольный ординал. Для данных пространств получены следующие результаты.

Теорема 1. Для любого элемента $a \in \tilde{l}_1(S_\alpha)$, формула $f(x) = \sum_{t \in S} a(t)x(t)$ задает линейный непрерывный функционал на линейном топологическом пространстве $C_c(S_\alpha)$. Верно и обратное:

если $f \in C_c^*(S_\alpha)$, то существует единственный элемент $a \in \tilde{l}_1(S_\alpha)$ такой, что для любого $x \in C_c(S_\alpha)$ $f(x) = \sum_{t \in S} a(t)x(t)$.

Следствие 1. Сопряженное пространство к линейному топологическому пространству $C_c(S_\alpha)$ имеет вид

$$C_c^*(S_\alpha) = \{a \in l_1(S_\alpha) : \exists \text{ компакт } K \subset S_\alpha, X_a \subset K\}.$$

Если α - счетный ординал, то теорема 1 верна для пространства $C_c(S \times [1, \alpha])$, если α - несчетный ординал, то используя результат А. Пелчинского и З. Семадени [1], получена следующая теорема.

Теорема 2. Для любого элемента $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$, формула $f(x) = \sum_{t \in S \times [1, \alpha]} a(t)x(t)$ задает линейный непрерывный функционал на

линейном топологическом пространстве $C_c(S \times [1, \alpha])$. Верно и обратное: если $f \in C_c^*(S \times [1, \alpha])$, то существует единственный элемент $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$ такой, что для любого $x \in C_c(S \times [1, \alpha])$

$$f(x) = \sum_{t \in S \times [1, \alpha]} a(t)x(t).$$

Список литературы

1. Semadeny Z, Pelczynski A. Spaces of continuous functions // Studia Math. 1959. Vol. 18. P. 211-222.

Интеграл Кристоффеля-Шварца на классах отображений с симметрией переноса

Хабарова Е.Л.

Томский государственный университет

В работе рассмотрен класс $X_{2\pi, 2\pi\lambda}$ голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемых на вещественную ось и удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi\lambda k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\lim_{\text{Im}z \rightarrow +\infty} (f(z) - \lambda z) = 0.$$

Для этого класса доказана формула типа формулы Кристоффеля-Шварца

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2,$$

где c_1, c_2 – комплексные постоянные.

Аналогично для класса $X_{2\pi\mu, 2\pi}$ голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемых на вещественную ось и удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(z + 2\pi\mu k) = f(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \left(f(z) - \frac{1}{\mu} z \right) = 0,$$

доказана формула типа формулы Кристоффеля-Шварца

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2\mu} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2.$$

Список литературы

1. Копанева Л. С. Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса : дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук / Л. С. Копанева. – Томск: Томский государственный университет, 2003. – 85 с.
2. Александров И. А. Теория функций комплексного переменного : Учебник. / И. А. Александров. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.

Секция «Методика преподавания математики, механики и информатики»

Специфика и особенности обучения магистров-учителей математики

Гриншпон Я.С.

Томский государственный университет

В школах Томской области остро стоят проблемы нехватки учителей математики, а также недостаточной предметной квалификации работающих учителей. Частично помочь решить эти проблемы призвана магистерская программа «Преподавание математики и информатики в школе», открытая в 2016 году на ММФ ТГУ. Программа адресована как уже работающим педагогам, так и выпускникам вузов, планирующим работать в школе.

Из многоадресности программы следует необходимость создания возможностей для успешного повышения квалификации слушателями, имеющими разный педагогический опыт, и значительно отличающимися по уровню начальной методической и предметной подготовки. Кроме того, знания и навыки, полученные в результате обучения, должны оказаться полезными в профессиональной деятельности учителя математики. В связи с этим, в учебный план программы были включены разделы, близкие к школьной математике, но существенно расширяющие стандартный школьный курс.

Это, например: теория чисел (основные числовые системы, целая и дробная части, системы счисления, теория делимости, диофантовы уравнения), многочлены (теоремы Безу и Виета, решение уравнений высших степеней, бином Ньютона и полиномиальная формула), неравенства (неравенства о средних, неравенство Коши-Буняковского), основы аналитической геометрии (координатно-векторный метод), дополнительные главы планиметрии (теоремы Чевы, Менелая, лемма о трезубце, формула Эйлера, радикальная ось, теорема Птолемея), элементы математического анализа (теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления), комбинаторика и теория вероятностей, специальные методы решения нестандартных задач (математическая индукция, принцип Дирихле,

дискретная непрерывность, инварианты, принцип крайнего, метод оценки и примера), решение уравнений и неравенств с параметрами.

Знание вышеперечисленных тем расширит творческие возможности учителя при проведении уроков, при организации внеурочной деятельности, а также при подготовке способных школьников к математическим конкурсам, конференциям и к сдаче ГИА.

Об акцентировании в учебных материалах

Дятлов В.Н.

*Южный математический институт ВНЦ РАН,
Новосибирский государственный университет*

Обострившиеся в последнее время проблемы математического образования, проявляющиеся в низком уровне математической подготовки школьников и студентов, побуждают выявлять спектр причин этого явления. Среди прочего можно обратить внимание на отдельные стороны учебной литературы, предлагающейся учащимся и студентам.

Студенты и школьники обычно не в состоянии структурировать излагаемый материал, выделять в нем главные линии и второстепенные, акцентировать свое внимание на приоритетных деталях изучаемых и применяемых фактов. Вместе с тем обычно в учебной литературе изложение дается сравнительно однородно, без выделения каких-то ключевых особенностей. Такой стиль изложения усугубляет проблемы, связанные с качеством математического образования.

Предлагается при подготовке учебных материалов отдельное внимание обращать на выделение наиболее существенных деталей, позволяющих организовать весь процесс усвоения предмета с учетом расстановки приоритетов и овладения определенным набором фактов и методов путем развития навыков на основе базовых средств.

Попытка организации учебного материала с расстановкой приоритетов описана в [1]. Там же предложены и другие особенности учебных материалов, такие как трехчастность, предполагающая кроме теоретической и практической составляющих промежуточный технологический блок, позволяющий повысить познавательную самостоятельность обучаемых и сформировать устойчивые навыки в изучении предмета.

Опыт автора по использованию изложенных в [1] рекомендаций показывает их эффективность.

Список литературы

1. Дятлов В.Н. Рассуждения о преподавании математического анализа. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018. 154 с.

Статистические методы исследования динамики учебных достижений школьников

Лазарева Е.Г., Новикова Н.В.

Томский государственный университет

Цель данной работы – выделить несколько основных статистических методов, которые можно применять в практической работе учителя для оценки динамики учебных достижений учащихся. Для каждого метода нужно сформулировать требования к оценочным процедурам, необходимые для его применения.

Особенности школьного обучения – не более 25-30 человек в классе, непрерывный учебный процесс, различные методики преподавания и учебно-методические комплексы – требуют внимательного выбора статистических критериев и соответствующего формирования измерительных методик и процедур. Разработка таких методик как для оценки динамики обучения класса в целом, так и для изучения индивидуальных особенностей познания обучающихся, становится особенно актуальной в связи с пониманием образования как процесса, а не результата обучения.

Для исследования вопроса об изменении уровня обученности в классе (сравнение достижений учащихся по разным темам, при разных методиках обучения) удобны для применения критерии знаков или более мощный критерий знаковых рангов [1]. Чтобы сравнить, насколько успешно два разных класса освоили один и тот же материал, естественно использовать ранговый критерий Манна-Уитни [1]. Для успешного использования ранговых критериев необходимы широкие шкалы оценивания учебных результатов школьников, когда за контрольную работу по теме ученик получает от 0 до N баллов, $N \approx 100$. Только это позволяет ранжировать результаты учащихся с минимальным совпадением рангов. При этом баллы должны давать количественную оценку действий учащегося, так чтобы 1

балл имел (по возможности) одинаковую значимость в разных заданиях.

Для изучения динамики учебных достижений одного ученика мы предлагаем также применять статистические критерии, но представлять результат одной контрольной работы школьника в виде набора баллов, полученных за реализацию определенных навыков. В этом наборе должно быть не менее 5 значений, чтобы применение критерия имело смысл. Требование к баллам как количественным оценкам при этом сохраняются. Проведение второй контрольной работы на эту же тему позволит сравнить успехи ученика в освоении каждого навыка и оценить наличие сдвига в уровне его подготовки (предполагается использование критерия знаковых рангов).

Для более детального исследования динамики формирования отдельных навыков у одного ученика мы предлагаем применять точный критерий Фишера – Ирвина [1], который позволяет оценить значимость изменения каждого навыка с помощью таблиц сопряженности.

Мы приводим примеры контрольной работы, составленной с учетом требований применимости описанных выше критериев, а также результаты исследования динамики учебных достижений школьников описанными выше методами.

Список литературы

1. Sheldon M. Ross. Introduction to probability and statistics for engineers and scientists. Elsevier Academic Press, 2004. 641 p.

Изучение позиционных систем счисления в школе

Лапатин А.Л.

Томский государственный университет

Изучение натуральных чисел в курсе математики начальной и средней школы (сравнение чисел и арифметические действия над числами) неразрывно связано с изучением десятичной записи чисел. Как правило, возможность, выделения не десятков, а других групп единиц, либо вообще не обсуждается, либо упоминается вскользь.

Парадоксально, но факт: определения позиционных систем счисления нет в учебниках по математике, зато оно присутствует в учебниках по информатике и ИКТ! Правда, там, в основном, изла-

гаются только правила работы с числами в двоичной и родственных ей системах счисления.

Таким образом, вопросы обоснования правил сравнения чисел и выполнения арифметических действий над ними в десятичной системе, а также возможность работы в других системах, практически не затрагиваются в школе. Исключение составляет учебно-методический комплект «МПИ».

Автором показано, что введение в школьный курс математики, начиная с 5 класса, более системного изучения различных позиционных систем счисления стимулирует интерес школьников к математике и способствуют как их успешному выступлению на математических конкурсах и конференциях, так и сдаче ГИА. Кроме того, системы счисления могут стать основой для изучения в 7-8 классах действия над многочленами от одной переменной. Нельзя не отметить, что знание систем счисления приводит к более глубокому пониманию понятия числа (например, что делимость числа на три – это свойство числа, а делимость суммы цифр на три – это свойство цифровой записи числа; эти свойства равносильны не во всех системах счисления).

Список литературы

1. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. Библиотека «Математическое просвещение». Выпуск 29. – М.: МЦНМО, 2004. – 52 с.
2. Гельфман Э. Г. Математика. 5 класс. Учебная книга и практикум. Натуральные числа и десятичные дроби. В 2 частях. Часть 1. Бинوم. Лаборатория знаний, 2014.

Организация самостоятельной работы студентов в мини-группах при обучении алгебре

Баркович О.А.

Белорусский государственный педагогический университет

Ориентация современного вуза на разностороннее развитие студентов предполагает, в частности, необходимость гармоничного сочетания учебной и учебно-исследовательской деятельности, раскрытия творческого потенциала студентов. Интересной с этой точки зрения представляется идея метода мини-групп для организации управляемой самостоятельной работы студентов [1].

В статьях [2; 3] проанализированы различные подходы к организации самостоятельной работы студентов при обучении алгебре. Обосновано, что именно управляемая самостоятельная работа в ми-

ни-группах, построенная на концепции уровневой дифференциации, технологии укрупненных дидактических единиц, использовании пропедевтического учебного материала и современных информационных технологий, позволяет вовлечь большее число студентов в активную работу на лекциях и практических занятиях.

Необходимо подчеркнуть, что при реализации метода мини-групп новое знание вводится как неизвестное, которое необходимо «открыть» при работе в команде, временном творческом коллективе. Устойчивые навыки самостоятельного выстраивания студентами в составе мини-групп содержательных взаимосвязей и параллелей в изучаемом материале способствуют формированию целостного знания [4, с. 107–108] и математического мышления, опираясь на которое, они смогут в дальнейшем успешно заниматься учебно-исследовательской деятельностью.

Список литературы

1. Донцов А.И., Донцов Д. А., Донцова М. В. Минигрупповой подход (метод минигрупп) как способ активного обучения старшеклассников и студентов // Вестник практической психологии образования. – 2012. – № 1 (30). – С. 62–65.
2. Баркович О. А. Управление самостоятельной работой мини-групп на практических занятиях по алгебре // Вестн БДПУ. Серия 3. 2016. № 4. С. 44–51.
3. Баркович О. А. Организация самостоятельной работы студентов в мини-группах при подготовке к лекциям по алгебре // Вестн БДПУ. Серия 3. 2017. № 2. С. 54–61.
4. Сотникова О. А. Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания. Архангельск : Поморский университет, 2004. 356 с.

«Множество» во внеурочной деятельности 5-6 классов

Галанова Н.Ю., Хорошкова Е.В.

Томский государственный университет

Для освоения темы «Множество» в 5-6 классах на занятиях внеурочной деятельности, рассмотрим задачи на упорядочивание конечных множеств по включению. Эти задачи способствуют закреплению знаний об операциях над множествами и их свойств, а так же развитию логического мышления. Будем говорить, что множество A меньше множества B по включению, если $A \subseteq B$. Отношение \subseteq , заданное на множестве всех подмножеств некоторого универсального множества U , является отношением нестрогого частичного порядка.

Задача. В классе дети занимаются музыкой (М), информатикой (И), шахматами (Ш). В ходе урока рассмотрим, чем занимаются де-

ти в каждом из перечисленных ниже множеств. Какие множества можно расположить по цепочке в порядке нестрого возрастания?

$$M \cap I, M, I, M \cup I,$$

$$M \cap I, M \cap Ш, Ш \cap I, M, I, Ш, M \cup I,$$

$$M \cup Ш, Ш \cup I, M \cap I \cap Ш, M \cup I \cup Ш.$$

Составим диаграммы отношений между множествами. Какие множества несравнимы? Какие ещё множества можно рассмотреть? Где их место на диаграмме?

Анализ школьной программы [1] показывает, что операции и отношения со множества эпизодически встречаются в школе во всех классах при изучении математики, но на них не акцентируется внимание. На занятиях внеурочной деятельности тема «Множество» позволяет не только закреплять полученный на уроках материал, но и решать нестандартные для 5-6 классов задачи, развивая логическое мышление учащихся.

Список литературы

1. Евсева А.А. О работе с понятиями теории множеств в школьном курсе математики // Материалы VI Международной научно-практической конференции. Казань, 25-26 ноября 2016. С. 184-188.

Методика формирования структуры тестовых заданий по математике для основной школы

Бумагина Е.А.

Томский физико-технический лицей

Компьютерное тестирование в процессе обучения математике в школе можно использовать не только с диагностическими и контролирующими целями, но и с целями обучения [1]. Подбор тестовых заданий по теме в этом случае основан на том, какие базовые навыки необходимы учащемуся для освоения этой темы, на каком уровне сложности и начальной подготовки учащихся осваивается тема, какой учебно-методический комплекс используется.

Для внедрения обучающего тестирования были выбраны темы «Неравенства» и «Площади фигур», которые изучаются в 8 классе. Задания подбирались следующим образом. В имеющихся учебных и методических пособиях были выбраны задания, которые являются базовыми для формирования навыков по данной теме, а также задания с нестандартными формулировками, которые нечасто можно

встретить. Отбирались задания, для решения которых необходимо сделать небольшое количество учебных действий. По возможности, в этих заданиях вводились меняющиеся числовые параметры.

Примеры задания с меняющимися числовыми параметрами.

Пример 1. Решите неравенство $13 - 9(x + 1) < 85$.

Варианты ответа: 1) $x > 9$ 2) $x < 9$ 3) $x < -9$ 4) $x > -9$.

Пример 2. Точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 4 : 5$. Площадь треугольника ABC равна 45. Найдите площадь треугольника ABM .

На базе одного задания можно сделать несколько различных заданий, требующих одних и тех же знаний и навыков, но разного алгоритма решения. Эти задания с помощью программы для создания тестов можно объединить в один раздел. Ученику при каждом новом прохождении теста случайным образом предлагается одно задание из раздела, тем самым он получает возможность решить несколько заданий, объединённых одним содержанием, если он пройдет тест несколько раз. При этом числовые параметры также можно изменять.

Пример двух заданий в одном разделе.

Пример 3.1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 12. Найдите его площадь.

Пример 3.2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна 12. Найдите его площадь.

Если в задании трудно ввести меняющиеся числовые параметры, то нужно подобрать больше однотипных заданий для одного раздела.

Комбинация всех описанных методов даёт возможность создать компьютерный тест, решать который можно неограниченное число раз – он каждый раз будет другим. При этом каждое новое прохождение теста будет способствовать формированию у обучающегося устойчивых навыков, а также стимулировать больше мышление, а не заучивание стандартных учебных действий.

Список литературы

1. Бумагина Е.А., Лазарева Е.Г. Методика внедрения заданий в форме компьютерных тестов в процесс преподавания математики в школе. Материалы VI Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование» (МПМО17). 2017. С. 106-109.

Секция «Современные задачи механики»

Особенности конвективных течений сложных по составу жидкостей в тонких полостях

Демин В.А.

Пермский государственный национальный исследовательский университет

При движении жидкостей по микроканалам возникают специфические гидродинамические явления, которые наблюдаются только на этих масштабах. Однако граница, разделяющая микрофлюидические эффекты и макроскопические гидродинамические явления, весьма размыта. Довольно сложно заранее предсказать какие факторы будут играть решающую роль при формировании процессов тепло- и массопереноса в той или иной геометрии по мере уменьшения характерных размеров полости. Эксперименты показывают, что в тонких каналах наиболее ярко гидродинамические парадоксы начинают проявляться при движении сложных по составу жидкостей. Это могут быть молекулярные смеси, многокомпонентные расплавы металлов или коллоидные растворы. Нередко текучие среды ведут себя неожиданно в ходе процессов смешения изначально однородных по составу жидкостей. Следует подчеркнуть, что аномальное поведение наблюдается в тонких, но имеющих макроскопические размеры полостях. Общая особенность рассматриваемых процессов состоит в том, что при формировании массопереноса в подобных полостях решающим является фактор взаимодействия жидкости с границами полости. Все обсуждаемые явления изначально были обнаружены экспериментально, а некоторые из них долгое время не имели теоретического объяснения. В настоящее время они достаточно подробно изучены и имеют не просто качественное объяснение, но и количественное описание. Конечно, обсуждаемыми примерами особенности движения жидкостей в тонких каналах и полостях не исчерпываются, и данная тематика будет пополняться новыми парадоксальными и имеющими красивое решение задачами.

Математическое моделирование природных пожаров

Перминов В.А.

Томский политехнический университет

Целью настоящей работы является разработка удобного вычислительного инструмента для анализа возникновения и распространения природных пожаров и их воздействия на здания и сооружения, расположенные вблизи лесных массивов. На основе математической модели, предложенной А.М. Гришиным, разработана модель распространения лесных пожаров, которая внедрена в программное обеспечение PHOENICS. Лес рассматривается как химически реагирующая многофазная среда, содержащая газовую фазу с объемной долей значительно превышающую объемную долю конденсированной фазы (вода в жидко-капельном состоянии, сухое органическое вещество, конденсированные продукты пиролиза и минеральная часть). Модель учитывает все важные физико-химические процессы: сушку, пиролиз, горение конденсированных и газообразных продуктов пиролиза, турбулентность горение, обмен массы, импульса и энергии между газом и твердой фазой, турбулентное течение, радиационный теплообмен. Турбулентность моделируется с использованием модели $k-\varepsilon$ RNG, а радиационный теплообмен описывается с помощью модели, подобной модели P-1 приближения. Кинетика типа Аррениуса используется для гетерогенных реакций (сушка, пиролиз и горение конденсированных продуктов пиролиза), а для горения газообразных продуктов пиролиза применяется подход с раздувом. Модель была подтверждена с использованием экспериментальных данных Мендес-Лопса и др. по распространению низового лесного пожара в слое хвои *Pinus pinaster*, расположенного в аэродинамической трубе. Прогнозируемая скорость распространения хорошо согласуется с экспериментальными значениями, полученными при разных скоростях ветра (от 1 до 3 м/с). При малой скорости ветра видно, что перед фронтом горения образуется вихревое течение, вращающееся по часовой стрелке, а факел пламени при этом колеблется со временем. По мере увеличения скорости ветра наблюдается переход от режима с преобладанием плаучести к однонаправленному течению.

Детектирование методом ИК-диагностики теплонапряженных участков на поверхности древесных строительных материалов, подверженных тепловому воздействию от модельных источников зажигания*

Касымов Д.П., Агафонцев М.В., Мартынов П.С., Перминов В.В.

Томский государственный университет

Известно, что природные пожары являются мощным природным и антропогенным фактором, существенно влияющим на функционирование и состояние лесов. Нередко пожары возникают и развиваются вблизи населенных пунктов и городов.

В литературе существует большое количество экспериментальных работ по исследованию пожарной опасности древесины, результаты которых свидетельствуют о влиянии различных факторов на ее пожароопасные свойства. На основе этих данных можно судить о показателях огнестойкости деревянных конструкций, однако большинство методов, используемых для оценки пожарной опасности древесины, относятся к классу контактных методов [1].

Следует учесть тот факт, что до сих пор в литературе имеется достаточно мало сведений по результатам применения бесконтактных методов при огневых испытаниях фрагментов зданий и строительных конструкций [2].

В данной работе производилось детектирование теплонапряженных участков на поверхности древесных строительных материалов, подверженной тепловому воздействию от природного пожара. В качестве метода диагностики использовалась ИК-термография.

Список литературы

1. Сивенков А. Б. Горение древесины и ее пожароопасные свойства // Монография. – М. : Академия ГПС МЧС России. – 2010. – 262 с.
2. N. Prat-Guitart [and other]. Infrared image analysis as a tool for studying the horizontal smoldering propagation of laboratory peat fires // Coal and peat fires: A global perspective. – 2015. – Pp. 121–139.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00232)

О некоторых разработках средств локализации и тушения природных пожаров в целях охраны лесных экосистем

Касымов Д.П.

Томский государственный университет

Природные пожары происходят по всему миру, количество разрозненных очагов возгорания, либо крупномасштабных пожаров, не уменьшается год от года, несмотря на усовершенствование систем прогноза систем лесной пожарной опасности. Актуальность изучения воздействия очага горения на торфяники и древесину объясняется необходимостью углубленного понимания теплофизических процессов, протекающих при зажигании и горении торфа и древесины, а также изучению механизмов перехода одного типа пожара в другой с целью уточнения существующих мер по предотвращению, локализации и тушению природных пожаров. Таким образом, изучение и способов борьбы с ними, несомненно.

В настоящее время известны и широко используются следующие основные методы борьбы с природными пожарами различной интенсивности [1]: "захлестывание" фронта низового лесного пожара; окапывание кромки лесного пожара грунтом с целью создания минерализованной полосы; тушение водой с помощью переносных ранцевых лесных опрыскивателей (РЛО) и с помощью авиации; отжиг ЛГМ; взрывные способы.

В данной работе рассмотрены разработки по локализации и тушению верховых, низовых лесных и степных пожаров. Зная структуру факела пламени [2], можно использовать это для создания устройств, позволяющих малыми энергетическими возмущениями разрушать наиболее уязвимую часть пламени – зону пиролиза и смешения.

Список литературы

1. Гришин А. М. Физика лесных пожаров. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1994. 218 с.
2. Гришин А.М., Зима В.П., Касымов Д.П. Применение взрывчатых веществ в устройствах локализации и тушения природных пожаров // Пожаровзрывобезопасность. 2015. Т. 24. № 7. С. 52–60.

Исследование распространения волн в монокристаллах жаропрочных никелевых сплавов*

Кривошеина М.Н.^{1,2}, Туч Е.В.¹, Майер Я.В.²

¹*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,*

²*Томский государственный университет*

Развитие современных авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) привело к необходимости создания специальных жаропрочных никелевых сплавов для литья монокристаллических лопаток газовой турбины, работающих в экстремальных условиях (высокие температуры – порядка $0,8T_{пл}$, экстремальные механические напряжения, длительная эксплуатация до 10 000 ч, агрессивные среды). Современная тенденция развития литейных жаропрочных никелевых сплавов заключается в использовании дефицитных элементов – таких как рений и рутений. Применение рения и рутения обеспечит повышение на 50–60°C рабочей температуры монокристаллических лопаток из этих сплавов. Сплав характеризуется ауксетичностью (отрицательным коэффициентом Пуассона – способностью испытывать деформацию того же знака в перпендикулярном направлении, что и у нагрузки) в некоторых направлениях, а также отличием упругих постоянных в 2,5 раза вдоль некоторых направлений. Из-за значительной анизотропии механических свойств монокристаллов жаропрочных никелевых сплавов характеристики прочности при растяжении будут зависеть от кристаллографической ориентации. Поэтому для расчетов конструкционной прочности монокристаллических лопаток и ресурсного проектирования ГТД используются данные о температурно-ориентационной зависимости упругих и прочностных свойств этих сплавов, таких как модуль упругости Юнга, коэффициент Пуассона, предел текучести и прочности вдоль кристаллографических осей.

С помощью численного моделирования получены волновые картины деформирования преград из жаропрочного никелевого сплава V поколения ВЖМ8 при их ударном нагружении алюминиевым ударником со скоростью 212 м/с. Механические свойства, использованные в расчетах, определены в работе [1] при рабочей температуре 800⁰ С. Получены профили скоростей тыльной поверхности

*Работа выполнена по проекту 23.1.2 в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы.

преграды из сплава ВЖМ8 для случаев ударного нагружения в направлениях кристалла (001), (111) и (011) с начальной скоростью 212 м/с.

Список литературы

1. Соловьев А.Е., Гольнец С.А., Хвацкий К.К. Анизотропия характеристик упругости при растяжении монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов: Электронный научный журнал «Труды ВИАМ», 2017, №10. DOI: 10.18577/2307-6046-2017-0-10-12-12.

Деформирование и разрушение полимерных композитов, армированных стекловолокном*

Кривошеина М.Н.^{1,2}, Туч Е.В.¹, Негматов М.М.²

¹*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,*
²*Томский государственный университет*

В последние годы полимерные композиты, армированные S2-стекловолокном, рассматриваются в качестве важного компонента в системах композитной цельнолитой брони. По этой причине вызывает интерес отклик таких материалов на ударное нагружение в широком диапазоне напряженных состояний. Обширные исследования упругих свойств, откольной прочности и уравниения состояния в рамках высокоскоростного нагружения были проведены [1] Дандекармом, Ботелером, Троттом и Юанем, в диапазоне более низких скоростей - (100-250) м/с эти исследования дополнены работами [2] Цая и Пракаша. Распространение ударных волн в полимерные композиты, армированных S2-стекловолокном, сопровождается расслаиванием стеклянных нитей и полимерной смолы, возникновением микротрещин в нитях, разрывом нитей при растяжении. Эти процессы приводят к рассеиванию, затуханию и дисперсии распространяющихся ударных волн. Скорость распространения ударных волн в полимерных композитах, армированных S2-стекловолокном, из-за анизотропии упругих свойств зависит от направления распространения. Например, упругие свойства стеклопластика на основе полимерной смолы Сусом 4102, армированной S2-стекловолокном, характеризуются шестью независимыми упругими постоянными. Поэтому наряду с многочисленными экспериментальными исследованиями упругих и прочностных свойств стеклопластиков при их ударном нагружении является актуальным исследование волновой картины деформирования и разрушения с помощью численных ме-

тодов. Целью работы является исследование особенностей распространения упругих волн и развития процессов деформации в материалах, упругие свойства которых характеризуются 6 независимыми упругими постоянными при их динамическом нагружении.

В работе методом конечных элементов моделируется ударное нагружение ударниками из алюминиевого сплава AL7075-T6 образцов различной толщины из ровинговой S2-стеклоткани. Ударное нагружение ровинговой S2-стеклоткани моделируется в трехмерной постановке, скорости ударного нагружения варьируются в диапазоне от 100 до 250м/с, учитывается анизотропия упругих и прочностных свойств ровинговой S2-стеклоткани. Расчеты проводились в рамках допущений механики сплошной среды, и деформирование ровинговой S2-стеклоткани рассматривалось как сплошного твердого тела без выделения стеклянных нитей. Проведено сравнение профилей скорости тыльной поверхности преград, полученных в натурных экспериментах в работах [2] и с помощью численного моделирования, полученных авторами настоящей работы. Показано, что соответствие профилей скоростей тыльных поверхностей преград, экспериментально измеренных с помощью системы VALINTM VISAR и вычисленных при численном моделировании, большей частью определяется равенством скоростей распространения продольных волн в образце из ровинговой S2-стеклоткани и в численном расчете. Варьирование скоростей распространения продольных волн в образцах из ровинговой S2-стеклоткани определяется геометрической разнородностью компонентов, включая несоответствие импедансов, геометрией армирования, расслаиванием и разрушением образца.

Список литературы

1. L. Tsai, V. Prakash Int. J. Solids Struct, 42, 2005, p.727.
2. L. Tsai, F. Yuan, V. Prakash, D.P. Dandekar Shock compression behavior of a S2-glass fiber reinforced polymer composite J. of Applied Physics 105, 2009, p. 093526, DOI 10.1063/1.3124622/

*Работа выполнена по проекту 23.1.2 в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы.

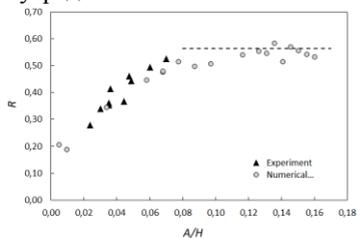
Исследование вихревого механизма подавления волн цунами подводными преградами*

Бошенятов Б.В.¹, Жильцов К.Н.²

¹Институт прикладной механики Российской академии наук,

²Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики ТГУ

Изучены особенности моделирования и распространения волн типа цунами в гидродинамическом лотке ИПРИМ РАН, а также их взаимодействие с непроницаемыми подводными преградами. Установлено, что наиболее перспективными являются подводные преграды, основанные на вихревом механизме поглощения энергии волн. При этом существует оптимальная высота преграды, при которой в вихревых структурах аккумулируется наибольшая энергия. Построена теоретическая модель, которая объясняет данный эффект. Основные результаты этих исследований опубликованы в рамках выполнения в ТГУ Проекта РФФИ № 15-08-04097-а. Однако из тех же исследований следует, что при заданной высоте преграды, наблюдается довольно значительный разброс данных по измеренным энергиям отражения и вихревых потерь. В настоящей работе приведены результаты исследования коэффициентов отражения (см. рис) и вихревых потерь волн типа цунами различной амплитуды при их взаимодействии с подводной преградой оптимальной высоты. Глубина воды в лотке изменялась от 102 до 104 мм. Длина падающей волны для всех экспериментов и численных расчетов составляла 3000 мм, усредненная высота волны изменялась от 5 мм до 16 мм. Из рисунка



видно, что при заданных условиях экспериментов и численного моделирования неожиданно появляется зависимость коэффициента отражения от параметра нелинейности при $A/H < 0,08$. Подобным образом ведет себя и зависимость вихревых потерь. Подобное поведение этих зависимостей объясняется вихревыми и нелинейными эффектами, которые имеют место при взаимодействии длинных гравитационных волн с подводными преградами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Проекта ТГУ № 8.1.33.2018 и государственной программы ФИ института ИПРИМ РАН.

Роль конвекции при взаимодействии капель *

Мисюра С.Я., Морозов В.С.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН

Процессы падения и слияния капель широко наблюдаются в природе и применяются в различных технологиях. Спреевое охлаждение широко применяется на практике [1]. В данных технологиях первостепенную роль играют механизмы интенсификации тепло и массообмена. Капли водно-солевого раствора падают на стенки труб в технологиях опреснения [2]. Взаимодействие капель и их падение важно учитывать в камерах внутреннего сгорания [3]. Можно также привести некоторые технические задачи, в которых используется падение капель и их коллективные эффекты взаимодействия: плазменное струйное распыление, струйная печать, струйное охлаждение микроэлектроники, тушение пожаров.

На сегодняшний день моделировать процесс падения капель на тонкий слой жидкости при высоких тепловых потоках крайне сложно из-за большого количества ключевых факторов. Для многих факторов не определены граничные условия, которые изменяются со временем, что существенно осложняет численное моделирование. Кроме этого, неясным остаётся вопрос о том, какие факторы являются основными.

В работе проведены экспериментальные исследования взаимодействия двух капель: маленькая холодная капля падает на большую каплю, расположенную на горячей стенке. Настоящая работа рассматривает одновременное влияние несколько ключевых факторов – динамического и теплового. При ударе капли о слой жидкости, теплообмен связан как с динамическим фактором (инерционные силы и скачок давления внутри капли), так и с тепловым (термокапиллярные силы). Новизна данной работы заключается в том, что впервые показано, что в момент крайне кратковременного взаимодействия капель (0.01–0.1 сек) реализуется рост скорости внутри капли в 8 раз. При этом определяющее влияние на усиление конвекции связано с термокапиллярной конвекцией, а роль динамического фактора незначительна (Рис. 1(d, e)). Падение капли воды с добавками ПАВ уменьшает скачок скорости внутри капли в 4 раза. Показано, что основной механизм переноса ПАВ связан с конвективным переносом мицелл (Рис. 1(a-c)). Проведенные исследования мгновенных полей скорости внутри сидящей капли (после падения кап-

* Исследования выполнены при поддержке РФФ (проект №15-19-10025)

ли) с применением Micro Particle Image Velocimetry (Micro PIV). Полученные результаты имеют большое значение для правильного моделирования теплообмена и помогут упростить постановку физико-математической модели, правильно определить граничные условия.

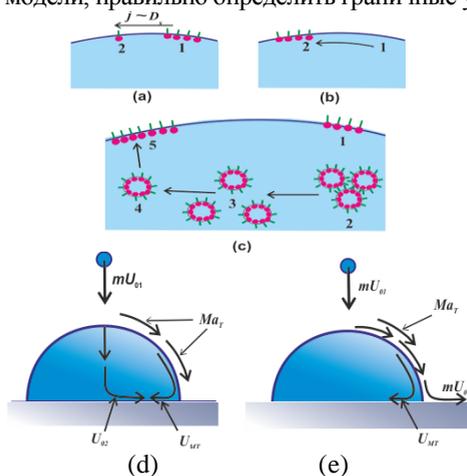


Рис. 1 (а-с) Характерные виды переноса в жидкости; (d, e) динамический и тепловой факторы, влияющие на конвекцию в капле

Список литературы

1. Wachters L.H.J., Westerling N.A.J. The heat transfer from a hot wall to impinging water drops in the spheroidal state, Chemical Engineering Science. 1966. Vol. 26. Pp. 1047-1056.
2. Shen S., Liang G., Guo Y., Liu R., Mu X. Heat transfer performance and bundle- depth effect in horizontal-tube falling film evaporators, Desalin. Water Treat. 2013. Vol. 51. Pp. 830-836.
3. Panao M.R.O., Moreira A.L.N., Flow characteristics of spray impingement in PFI injection systems, Exp. Fluids. 2005. Vol. 39(2). Pp. 364-374.

Численное решение задачи об инъекции жидкой двуокиси углерода в метаногидратный пласт в осесимметричной постановке*

Столповский М.В., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

Огромные запасы природного газа, сосредоточенные в гидратах, делают их практически неисчерпаемым источником энергии. Рядом исследователей предлагается идея, связанная с инъекцией CO_2 в газогидратные пласты с целью извлечения из них природного газа и связывание диоксида углерода в гидратную форму [1]. В настоящей работе в осесимметричной постановке представлены результаты численного моделирования инъекции жидкой двуокиси углерода в пористый пласт конечной длины, изначально насыщенный метаном и его гидратом. Полагается, что через скважину нагнетается жидкая двуокись углерода, параметры которой соответствуют условиям стабильного существования CO_2 и его гидрата. В результате нагнетания CO_2 в пласте образуются две области, которые содержат CO_2 и его гидрат, а также CH_4 и его гидрат. При этом возникает подвижная граница фазовых переходов, движущаяся вглубь пласта и разделяющая между собой указанные две области. Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения массы и энергии, закон Дарси и уравнение состояния, решалась численно с использованием метода ловли фронта в узел пространственной сетки. Установлено, что в случае нагнетания жидкого диоксида углерода с постоянным массовым расходом в пласт, насыщенный метаном и его гидратом в зависимости от массового расхода и параметров, характеризующих исходное состояние системы, процесс замещения метана диоксидом углерода в исходном газогидрате может происходить в двух разных режимах, характеризующихся либо только образованием гидрата диоксида углерода, либо как протеканием вышеуказанного процесса, так и кипением диоксида углерода. Построены и проанализированы критические диаграммы, разделяющие эти два режима.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-20001).

Список литературы

1. Methane exploitation by carbon dioxide from gas hydrates-phase equilibria for CO₂-CH₄ mixed hydrate system. / K. Ohgaki, K. Takano, H. Sangawa, T. Matsubara, S. Nakano // J Chem Eng Jpn. 1996. № 29. С. 478-483.

Метод паде-аппроксимант для соединения асимптотик на примере задачи обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком газа

Шатров А.В.

Кировский государственный медицинский университет

Асимптотические методы дают возможность получения решений в аналитическом виде только в области действия асимптотик. Остается проблема описания переходной области. Для этой цели может быть очень полезен метод Паде-аппроксимант. Пусть задано разложение функции степенным рядом по малому параметру:

$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i$. Тогда дробно-рациональная функция

$F_{mn}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^m a_i \varepsilon^i / \sum_{i=0}^n b_i \varepsilon^i$ называется Паде-аппроксимантой (РА), где

коэффициенты определяются из следующего условия: первые компоненты $(m+n)$ разложения дробно-рациональной функции в ряд Маклорена совпадают с первыми компонентами $(m+n+1)$ степенного ряда. Таким образом, Паде-аппроксиманта выполняет мероморфное продолжение функции, заданной в виде степенного ряда и по этой причине позволяет достичь успеха в случаях, когда аналитическое продолжение применить нельзя. Если РА сходится к заданной функции, то корни в его знаменателе стремятся к сингулярным точкам. В математической литературе исследовались, главным образом, одноточечные дробно-рациональные аппроксимации типа РА. Двухточечные аппроксимации Паде (ТРРА), соединяющие асимптотики в переходных слоях использовались лишь в отдельных прикладных задачах. В работе систематизируется и методологически обосновывается процедура применения соединения асимптотических разложений на примере задачи обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком газа.

Исследование структуры течения в пламени при диффузионном горении некоторых видов топлив с применением методов термографии и PIV

Агафонцев М.В.¹, Лобода Е.Л.¹, Рейно В.В.²

¹*Томский государственный университет,*

²*Институт оптики атмосферы СО РАН*

В данной работе в качестве горючих материалов использовались жидкие углеводородные топлива и растительные горючие материалы. Интенсивность ИК-излучения пламени и распределение температуры регистрировались при помощи тепловизора JADE J530SB с узкополосным оптическим фильтром (спектральный интервал 2.5-2.7 мкм). Регистрация гидродинамической структуры пламени была осуществлена с применением PIV-системы «Полис» в ИТ СО РАН (И.С. Ануфриев, Е.П. Копьев, Е.Ю. Шадрин). В качестве трассеров, по аналогии с [1], использовались частицы оксида кремния, образующиеся при добавлении небольшого количества силиконового масла в зону горения.

Аналогично обработке термограмм [2] была проведена статистическая обработка размеров температурных неоднородностей в пламени и крупных вихревых областей на трассерных PIV-изображениях, поддающихся идентификации и измерению.

Анализ полученных экспериментальных данных говорит о приемлемом согласовании результатов измерений размеров температурных неоднородностей в пламени, полученных при помощи термографии, и размеров завихрений в облаке трассеров (оксида кремния) на PIV-изображениях.

Список литературы

1. Loboda E.L., Matvienko O.V., Vavilov V.P., Reyno V.V., Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // *Infrared Physics & Technology*. 2015. Vol. 2015. 72. Pp. 1–7. <http://dx.doi.org/10.1016/j.infrared.2015.07.001>
2. Alekseenko S. V., Anufriev I. S., Vigriyanov M. S., et al. Steam-Enhanced Regime for Liquid Hydrocarbons Combustion: Velocity Distribution in the Burner Flame // *Thermophys. Aeromech.* 2014. Vol. 21(3). Pp. 393–396

Моделирование режимов естественной конвекции в замкнутой частично пористой полости, заполненной жидкостью с переменной вязкостью*

Астанина М.С., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

Развитие промышленности и приборостроения требует поиска и разработки эффективных систем охлаждения электронных компонент. В связи с этим в последнее время возрос спрос на математическое моделирование пассивных и активных систем охлаждения в различных постановках.

В настоящей работе проводится численное моделирование процессов тепломассопереноса в замкнутой квадратной полости с пористой вставкой. Полость заполнена ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Вязкость среды является экспоненциальной функцией температуры $\mu = \mu_0 \cdot \exp\{-C(T - T_0)/\Delta T\}$.

Математическая модель построена на основе двумерных нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных с использованием безразмерных переменных «функция тока – завихрённость – температура» [1, 2]. Анализ результатов проводился по полученным распределениям изолиний функций тока и температуры, а также по значениям числа Нуссельта, средней температуры внутри тепловыделяющего элемента и интенсивности циркуляции среды в полости.

Результаты показывают, что изменение свойств пористой вставки и её высоты позволяют улучшить охлаждение источника и интенсифицировать теплоперенос.

Список литературы

1. Astanina M. S. and Sheremet M. A. A transient free convection study with temperature-dependent viscosity in a square cavity with a local heat source// IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 124. – 012039.
2. Астанина М.С. Численный анализ нестационарных режимов естественной конвекции с переменной вязкостью в замкнутой полости с локальными изотермическими участками// Материалы 54-ой международной научной студенческой конференции

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

Влияние угла наклона полости на конвективные режимы плавления материала в условиях охлаждения тепловыделяющего элемента*

Бондарева Н.С., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

Использование таких материалов, как парафины широко распространено в современных энергетических отраслях. Способность поглощать большое количество энергии при фазовом переходе в определенных температурных условиях позволяет хранить, транспортировать тепло и поддерживать постоянную температуру. Интенсивность плавления связана с теплофизическими характеристиками материала и геометрическими параметрами системы. Теплоперенос внутри системы осуществляется за счет теплопроводности, в расплаве интенсифицируется конвективным теплопереносом. Детальное изучение сложного процесса взаимодействия механизмов переноса энергии практически невозможно провести экспериментально, поэтому численные задачи теплопереноса в материалах при фазовых переходах являются актуальными на сегодняшний день.

В данной работе проведено численное исследование теплообмена внутри области, заполненной парафином с наночастицами и нагреваемой от источника постоянного объемного тепловыделения. Двумерная модель процесса плавления была сформулирована в безразмерных переменных «функция тока - завихренность - температура» с учетом естественно-конвективного теплопереноса, возникающего в расплаве. Система дифференциальных уравнений в частных производных была решена с использованием метода конечных разностей [1]. Моделирование было проведено при различных углах наклона системы. Получены локальные и интегральные характеристики процесса плавления на различных этапах нагревания системы.

* Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (проект № 13.9724.2017/8.9).

Список литературы

1. Bondareva N.S., Sheremet M.A. Flow and heat transfer evolution of PCM due to natural convection melting in a square cavity with a local heater // International Journal of Mechanical Sciences, 2017, Vol. 134. Pp. 610-619.

Естественная конвекция степенной жидкости в полости с тепловыделяющим источником энергии*

Бондаренко Д.С., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

Естественная конвекция степенных жидкостей в прямоугольных полостях активно применяется в современных технических приложениях, таких как нефтеразработка, машиностроение, полимерная инженерия. Псевдопластические жидкости используются в качестве охлаждающей среды в электронных модулях и компактных теплообменниках.

Целью настоящей работы является математическое моделирование явления естественной конвекции в замкнутой полости, заполненной неньютоновской степенной жидкостью, при наличии тепловыделяющего источника энергии.

В настоящей работе моделируются режимы свободной конвекции степенной жидкости в замкнутой квадратной полости при наличии тепловыделяющего источника энергии, расположенного на нижней стенке полости. Нагреватель является твердым теплопроводным элементом постоянного внутреннего объемного тепловыделения. Среда в полости считается теплопроводной жидкостью, которая удовлетворяет приближению Буссинеска. Для описания течения и теплопереноса внутри полости используются нестационарные дифференциальные уравнения Навье–Стокса в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура».

Для решения поставленной задачи использовался метод конечных разностей. Разработанный программный код был протестирован на множестве модельных задач, а также проанализирован на сеточную сходимость.

*Работа выполнена в рамках реализации проекта научного фонда (соглашение № 17-79-20141).

В результате численного анализа были установлены распределения изолиний функции тока и температур, отражающие влияние числа Рэлея и показателя поведения степенной жидкости на структуру течения и теплоперенос. Установлено влияние определяющих комплексов на интенсивность теплоотвода от источника энергии.

Решение плоской задачи термоупругости во внешней и внутренней многосвязной областях методом потенциала

Веремейчик А.И.

Брестский государственный технический университет

На основе теории потенциала построена механико-математическая модель и получены основные уравнения двумерных задач теплопроводности и термоупругости для изотропных однородных тел. С помощью метода граничных интегральных уравнений теории потенциала с использованием логарифмических потенциалов простого и двойного слоя, а также формулы Грина для плоской задачи построены интегральные уравнения краевых задач теплопроводности, термоэластопотенциалы и термоупругие потенциалы плоской задачи и получены интегральные уравнения термоупругости относительно неизвестных плотностей потенциала. Получены выражения для определения термоупругих перемещений и напряжений во внутренних и граничных точках области. Построен алгоритм численной реализации интегральных уравнений и на алгоритмическом языке FORTRAN составлена компьютерная программа решения плоских краевых задач термоупругости. Сравнение результатов численного решения с существующими аналитическими решениями подтвердило правильность созданной модели и алгоритма.

Для решения плоских краевых задач термоупругости в многосвязной внутренней и внешней плоских областях с использованием фиктивных источников тепла разработан алгоритм численной реализации интегральных уравнений и составлена компьютерная программа. По найденным плотностям потенциала составлены уравнения, позволяющие определить термоупругие перемещения и напряжения во внутренней и внешней многосвязной областях. Решенные тестовые задачи позволили сделать вывод о достоверности разработанного алгоритма и программных средств.

Предложен способ компьютерной визуализации данных гранично-элементного решения некоторых инженерных задач механики, основан-

ный на обработке FORTRAN–результатов программой визуализации данных Tecplot 360. С помощью разработанного симбиоза двух программ решены задачи по исследованию НДС длинного цилиндра и прямоугольной полосы с отверстиями.

**Математическое моделирование сопряженного
конвективно-радиационного теплообмена в замкнутой
полости с локальным источником объемного
тепловыделения***

Гибанов Н.С., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

Актуальность исследований сопряженных задач естественно-конвективного тепло- и массообмена в замкнутых контурах подтверждается интересом к таким исследованиям со стороны множества российских и зарубежных ученых, а также многочисленными сферами применения результатов таких исследований – отвод тепла в различных приборах, системах и процессах, ядерные энергетические установки, солнечные коллекторы, охлаждение силовых модулей, теплообменники [1]

В представленной работе проводятся численные исследования ламинарных режимов двумерной естественной конвекции и поверхностного теплового излучения в замкнутой полости при наличии источника тепловыделения. Также учитывается проводимость стенок рассматриваемой полости, моделирующей замкнутый блок радиоэлектронной техники. В результате исследований были получены распределения температуры и скорости внутри исследуемой области, а также определен тепловой эффект внутри ограждающих теплопроводных твердых стенок. Проведена оценка влияния механизма поверхностного излучения на теплоперенос, а также изучено влияние числа Рэлея на эффективность теплоотвода с поверхности нагревающего элемента.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии Президента РФ СП-1053.2018.1.

Список литературы

1. Кузнецов Г.В., Шерemet М.А. Сопряженная естественная конвекция в замкнутой области при наличии тепловыделяющего элемента с постоянной интенсивностью тепловыделения. // Прикладная механика и техническая физика, 2010, Т. 51, №5, С. 95-110.

Локализация компонентов металлических расплавов в тигле*

Демин В.А.¹, Мизев А.И.², Петухов М.И.¹, Шмыров А.В.²

¹ *Пермский государственный национальный исследовательский университет,*

² *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Представлены результаты прямого численного моделирования процесса разделения легкоплавких бинарных металлических расплавов в открытом тигле с погруженным туда активным алундовым стержнем. В качестве составляющих расплава рассматривается пара олово и свинец вблизи точки эвтектики. Рабочий стержень нагревается сверху по линейному закону, и в силу специфики его строения на границе раздела “расплав – алундовая поверхность” возникает термодинамическая сила, движущая тяжелый поверхностно-активный компонент в нижнюю часть капилляра. После стекания с поверхности стержня он оседает на дне тигля. В условиях управляемого слабого нагрева сверху конвективное движение в полости является слабым, в результате чего тяжелый компонент не размывается по пространству, а локализуется под стержнем. На основе законов и уравнений, справедливых в отношении многофазных гидродинамических систем, построена физическая модель, описывающая макроскопическое движение в расплаве. Показано, что данный процесс можно положить в основу технологии разделения бинарных легкоплавких металлических расплавов на компоненты.

Список литературы

1. Демин В.А., Мизев А.И., Петухов М.И., Шмыров А.В. О необычном поведении расплава Al-Si в тонких капиллярах // Вестник Пермского университета. Физика.

*Работа выполнена с поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00662 а).

Турбулентные режимы конвективно-радиационного теплообмена в замкнутой полости при наличии локального источника объемного тепловыделения*

Мирошниченко И.В., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

В последнее время наметился устойчивый интерес к исследованию совместного влияния теплового излучения и естественной конвекции на гидродинамику и теплоперенос в замкнутых областях [1]. Анализ турбулентных режимов переноса тепла и массы имеет существенное практическое значение вследствие возможности оптимизации тепловых режимов в энергетических системах.

Данная работа посвящена численному моделированию влияния приведенной степени черноты ограждающих конструкций, а также числа Рэлея на турбулентные режимы сопряженного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой квадратной области при наличии локального источника объемного тепловыделения. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена возможностью применения полученных результатов исследования для совершенствования существующих методик расчета сложного теплообмена в замкнутых областях. Краевая задача была решена численно методом конечных разностей. Разработанный алгоритм был подробно протестирован на ряде модельных задач свободноконвективного теплопереноса. В результате проведенных исследований получены распределения изолиний функции тока, температуры, завихренности, кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Показано, что увеличение приведенной степени черноты ограждающих стенок приводит как к ослаблению конвективного теплообмена, так и к интенсификации радиационного механизма переноса энергии.

Список литературы

1. Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A. Turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosures using experimental and numerical approaches: A review // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2018, Vol. 82 P. 40–59.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-2819.2017.8).

Нестационарные режимы конвективного теплопереноса во вращающейся полости при наличии источника энергии и пористой вставки*

Михайленко С.А., Шермет М.А.

Томский государственный университет

Конвективный теплообмен во вращающихся пористых полостях имеет многочисленные инженерные приложения, включающие в себя пищевые и химические процессы, охлаждение электронного оборудования, проектирование вращающегося оборудования. По-

дробное описание приложений можно найти, например, в монографии [1]. Целью настоящего исследования является численное моделирование конвективного теплопереноса в квадратной вращающейся полости при наличии источника энергии и пористой вставки.

Полость (рис. 1) наполнена жидкостью и вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω_0 . Вертикальные стенки поддерживаются при постоянной температуре T_c , горизонтальные стенки считаются адиабатическими. Внут-

Рис. 1 – Область решения

ри полости находится тепловой источник и пористая вставка высоты h .

Уравнения записываются в безразмерном виде в переменных «функция тока-завихренность». Для их решения используется метод конечных разностей. Результаты получены для широкого диапазона изменения определяющих параметров. Исследовано их влияние на распределения изолиний функции тока и изотерм, а так же на среднее число Нуссельта на поверхности источника.

Список литературы

1. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media (4th edition) // Springer. New York. 2013.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

Динамика нерастворимого сурфактанта в ячейке Хеле – Шоу при неоднородном нагреве сверху*

Брацун Д.А.¹, Демин В.А.², Мизев А.И.³, Петухов М.И.²,
Шмыров А.В.³

¹*Пермский национальный исследовательский
политехнический университет,*

²*Пермский государственный
национальный исследовательский университет,*

³*Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Работа посвящена численному решению системы уравнений термокапиллярной конвекции, описывающей поведения нерастворимого сурфактанта на свободной поверхности жидкости в ячейке Хеле-Шоу. На свободной поверхности задавался линейный теплоток, что приводило к неоднородности касательных напряжений и генерации течения. При этом были учтены как термокапиллярный, так и концентрационно-капиллярный механизмы. Установлено, что при значениях параметра эластичности $0 < E < 1$ на поверхности формируются две различные области – свободная от сурфактанта и застойная, покрытая пленкой. Для свободной области характерен сильный термокапиллярный эффект, который способствует развитию конвекции в объеме. В то же время застойная область характерна большим перепадом концентрации, который тормозит течение. На поверхности образуется точка стагнации, положение которой при изменении параметра E было изучено в данной работе.

Список литературы

1. Shmyrov A.V., Mizev A.I., Demin V.A., Petukhov M.I., Bratsun D.A. On the extent of surface stagnation produced jointly by insoluble surfactant and thermocapillary flow // *Advances in Colloid and Interface Science*. 2017, pp 10-17. doi:10.1016/j.cis.2017.08.010.

*Работа выполнена с поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00662 а).

Независящие от системы отсчёта производные в двумерных задачах деформирования: растяжения/сжатия или чистого сдвига на примере алюминиевого сплава Д16*

Стребкова Е.А.¹, Кривошеина М.Н.^{1,2}

¹*Томский государственный университет,*

²*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН*

Для моделирования упругопластических деформаций в поликристаллах и монокристаллах для расчёта напряжений используются традиционно производная Яуманна и реже производная Грина-Нахди [1,2]. Однако, из литературы известно, что при численной реализации у них есть недостатки: применение производных Яуманна и Грина-Нахди приводит к возникновению остаточных напряжений после завершения нагрузки при простом сдвиге, а для численного расчёта с использованием производной Грина-Нахди помимо текущих известных параметров необходимо вычислять дополнительные [1,2,4].

Поэтому возникла задача проанализировать возможность применения других производных для задач, в которых процессы деформации сопровождаются только растяжением/сжатием, например, при исследовании пластичных и прочностных свойств материала в задачах распространения ударных волн в преградах, или задачах, сопровождаемых только сдвиговыми деформациями. В качестве производных рассмотрены производные Яуманна, Грина-Нахди, а так же логарифмическая производная, производная Олдройда, Коттер-Ривлина и Труделла [3]. Последние три характеризуются как конвективные, базисы которых являются деформируемыми [2]. И это можно отнести к их недостаткам. Сделаны рекомендации по применению той или иной производной при решении разного класса задач.

Список литературы

1. Meyers A., Xiao H., Bruhns O. Elastic stress ratcheting and corotational stress rates // Tech. Mech. 2003. В.23. Н.2-4. P.92-102.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-31-00278 мол_а.

2. Трусов П. В., Кондратьев Н. С., Швейкин А. И. О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С.182-200.
3. Meyers A., Xiao H., Bruhns O. Choice of objective rate in single parameter hypoelastic deformation cycle // Comp. & Struct. 2006. № 84. P.1134-1140.
4. Трусов П. В., Швейкин А. И., Янц А. Ю. О разложении движения независимых от выбора системы отсчёта производных и определяющих соотношений при больших градиентах перемещений: взгляд с позиции многоуровневого моделирования // Физическая мезомеханика. 2016. Т.19. № 2. С.47-65.

Математическое моделирование зажигания металлизированного твердого ракетного топлива импульсом лазерного излучения*

Порязов В.А., Крайнов А.Ю.

Томский государственный университет

В работе представлена физико-математическая модель зажигания металлизированного твердого топлива импульсом лазерного излучения. Модель учитывает физико-химическое взаимодействие в конденсированной и газовой фазах, газификацию твердого топлива в индукционный период и выход горения на стационарный режим.

Математическая модель основана на дифференциальных уравнениях в частных производных. В расчетной области записываются уравнения переноса тепла и глубины превращения в конденсированной фазе и двухскоростная, двухтемпературная модель реагирующего течения продуктов газификации над поверхностью твердого топлива [1]. Для моделирования процессов течения продуктов сгорания и горения частиц алюминия в составе продуктов, оттекающих от поверхности горения ТРТ, учитывается дисперсность частиц, отличие их температур и скоростей от несущей газовой фазы. На границе между конденсированной фазой и газовой фазой (поверхность горения) ставятся условия сопряжения: равенства тепловых потоков и температуры, равенство потоков массы компонентов справа и слева от границы раздела фаз.

Проведено исследование влияния мощности и времени излучения лазера на характеристики переходных процессов, приводящих к зажиганию в зависимости от массовой доли и дисперсности порошка металла в составе топлива.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-38-00533 мол_а.

Список литературы

1. Порязов В. А. , Крайнов А. Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика, 2017, № 50, С. 99–111

К теории нелинейной динамики физических маятников

Гладков С.О., Богданова С.Б.

Московский Авиационный Институт (МАИ)

На примере двух компланарных металлических маятников, точки подвеса которых находятся на одном горизонтальном уровне при фиксированном расстоянии b . друг от друга, показана принципиальная возможность их синхронизации благодаря существованию лишь двух физических факторов: 1. Эффекту электромагнитного взаимодействия между ними и 2. Учету ЭМ излучения, приводящего к нелинейному затуханию маятников. Отмечается, что подобные эффекты проливают свет и на огромное количество других весьма похожих явлений, а потому позволяют утверждать, что сам процесс синхронизации является чисто природным свойством, присущим множеству не только неодушевленных тел, но также и биологическим объектам. С учетом отмеченных двух факторов (других в природе просто не существует) из условия сохранения мощности излучения получена довольно сложная система из двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая всю стадию процесса хаотической подстройки металлических маятников друг к другу. Благодаря методам численного интегрирования были найдены решения полученных уравнений, позволившие графически проиллюстрировать весь ход эволюции, и, таким образом, численно определить время синхронизации $t_{\text{синхр}}$. Оказалось, что по порядку величины оно будет соответствовать времени синхронизации тяжелых корабельных часов, измеренному в самом первом в этом направлении эксперименте Гюйгенса. Отмечено также и численно доказано, что благодаря этому природному явлению синхронизация будет наблюдаться также в случае не эквивалентных физических маятников, и не будет зависеть от их количества N и материала.

Список литературы

1. To the problem of synchronization of physical pendulums/ С.О.Гладков, С.Б.Богданова // Тез.докл. на межд. конф. по дифф. ур. и динамическим системам, г.Суздаль, 6-11июл. 2018. с.240-242.

Моделирование активной термоэмиссионной тепловой защиты при конвективном нагреве

Зимин В. П.¹, Ефимов К. Н.², Овчинников В. А.², Якимов А. С.²

¹*Томский политехнический университет,*

²*Томский государственный университет*

При создании гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) актуальным является проведение исследований, связанных с созданием систем тепловой защиты от аэродинамического нагрева. Температура некоторых участков тела при полете может достигать 2500 - 3000 К [1, 2]. Известны много различных методов пассивной, активной и комбинированной тепловой защиты [1-6].

Отметим одно из перспективных направлений способов активной тепловой защиты, основанной на термоэмиссионном методе [6]. Данный метод позволяет преобразовать тепловую энергию, полученную при нагреве оболочки ГЛА, непосредственно в электрическую. При этом испарение тепловых электронов с эмиттера сопровождается понижением температуры последнего [7]. В системе тепловой защиты, основанной на термоэмиссионном методе, протекают множество взаимосвязанных процессов [7, 8]: эмиссионных, электрических, плазменных, тепловых, адсорбционных и др. Экспериментальные исследования термоэмиссионных установок довольно сложны и дорогостоящи [9, 10], поэтому уделяется большое внимание математическому моделированию протекающих в них процессов [8-12]. В данной работе представлена и исследована модель активной термоэмиссионной тепловой защиты.

Показано, что выбором параметров защиты возможно существенно уменьшить температуру её конструкций. Разработана математическая модель активной термоэмиссионной тепловой защиты при конвективном нагреве многослойной оболочки. Обнаружено понижение температуры поверхности оболочки и температуры поверхности эмиттера в результате тепловой эмиссии электронов с поверхности катода. Получено качественное согласование результатов расчета с известными данными.

Список литературы

1. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
2. Никитин П.В. Тепловая защита. М.: МАИ, 2006. 512 с.

3. Гришин А.М., Голованов А.Н., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Якимов А.С. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. 358 с.
4. Горский В.В. Теоретические основы расчета абляционной тепловой защиты. М.: Научный мир, 2015. 688 с.
5. Якимов А.С. Математическое моделирование тепловой защиты и некоторых задач тепломассообмена. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. 197 с.
6. Керножицкий В.А., Колычев А.В., Охочинский Д.М. Термоэмиссионный способ защиты частей летательного аппарата при их аэродинамическом нагреве. Патент № 2404087 РФ Б.И. 2010. № 32. 7 с. Оpubл. 3. 11. 2009.
7. Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марциновский А.М. и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / Под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса. М.: Наука, 1973. 480 с.
8. Ушаков Б.А., Никитин В.Д., Емельянов И.Я. Основы термоэмиссионного преобразования энергии. М.: Атомиздат, 1974. 288 с.
9. Сиявский В.В. Методы и средства экспериментальных исследований и реакторных испытаний термоэмиссионных электрогенерирующих сборок. М.: Энергоатомиздат, 2000. 375 с.
10. Квасников Л.А., Кайбышев В.З., Каландаришвили А.Г. Рабочие процессы в термоэмиссионных преобразователях ядерных энергетических установках. М.: МАИ, 2001. 208 с.
11. Бровальский Ю.А., Рожкова Н.М., Сиявский В.В. и др. Обобщенный расчет вольт-амперных характеристик и полей температуры термоэмиссионных преобразователей на основе данных испытаний изотермического ТЭП // Термоэмиссионные преобразователи энергии. - М.: ВНИИТ. 1969. С. 281-294.
12. Бабушкин Ю.В., Зимин В.П. Методы расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионных электрогенерирующих сборок // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 2. С. 135-139.

Динамическое состояние пластической фазы фуллерита

Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В.

Томский государственный университет

Выделяют две фазы фуллерита низкотемпературную, имеющую в структуре молекулярного кристалла простую кубическую решетку и пластическую с гранецентрированной решеткой. В пластической фазе молекулы фуллеренов более плотно упакованы в пространстве. Здесь каждый фуллерен окружен двенадцатью ближайшими фуллеренами, находящимися на минимальном расстоянии от рассматриваемого внутреннего узла кристаллической решетки. При этом имеется еще шесть узлов, отстоящих на расстоянии шага h ПК-подрешетки и ещё восемь на расстоянии $h\sqrt{6}/2$. Особенно близко расположены узлы первого эшелона. Платой за сближение с этими узлами является более мощное силовое воздействие со стороны отдельных углеродных атомов ближайших фуллеренов.

Данная работа посвящена выяснению физических причин, определяющих вращение фуллереновых сфер в пластической фазе фуллерита. В рамках атом-атомного представления взаимодействий, возникающих на уровне элементарных частиц (атомов углерода) как силы отталкивания, так и силы притяжения создают крутящие моменты по отношению к каждому внутреннему фуллерену, что и вызывает его поворот вокруг своего собственного центра. Для решения поставленной задачи эффективным оказалось применение подхода Эйлера, хорошо известного в классической механике. Расчетами найдена частота вращения фуллереновых сфер, совпадающая с данными полученными на основе физического анализа состояния материала.

Течение жидкости Сиско в цилиндрической трубе

Федоров Р.В., Матвиенко О.В.

Томский Государственный Университет

Развитие химических технологий делает актуальными задачи исследования закономерностей течения неньютоновских сред [1]. Целью настоящей работы является исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско.

Проведенные исследования показали, что при значениях числа Сиско $Si > 500$ неньютоновские свойства течения можно не учитывать. Для $Si < 500$ коэффициент гидравлического сопротивления псевдопластической жидкости Сиско существенно превышает коэффициент сопротивления ньютоновской жидкости с вязкостью μ_{∞} , движущейся под тем же перепадом давления. В периферийной и пристеночной части течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения, где градиент скорости имеет невысокие значения, наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. С увеличением скорости сдвига происходит уменьшение эффективной вязкости.

Список литературы

1. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. Инженерно-Физический журнал. 2014. Т. 87, № 1. С. 192–199.

Нестационарный теплообмен при сверхзвуковом обтекании затупленных тел в широком диапазоне чисел Рейнольдса

Гольдин В.Д., Зинченко В.И.

Томский Государственный Университет

В сопряжённой постановке рассматривается задача нестационарного теплообмена сферически затупленного конуса при его сверхзвуковом обтекании под нулевым углом атаки. Численное решение получено как для ламинарного, так и турбулентного режимов течения в пограничном слое. Результаты расчётов тепловых потоков в начальные моменты времени сравниваются с экспериментами в аэродинамических трубах. Рассматриваются такие условия обтекания, геометрические и теплофизические характеристики теплозащитных покрытий (ТЗП), при которых не происходит их разрушение под действием аэродинамического нагрева.

Прослежена эволюция температурного поля ТЗП вплоть до выхода на стационарный режим. Показано, что переток тепла вдоль поверхности тела может оказать значительное влияние на значение температуры. Для различных теплозащитных материалов оценена возможность снижения уровня максимальных температур в зависимости от определяющих параметров задачи. В результате расчётов получено, что максимальное значение температуры поверхности может быть значительно снижено за счёт выбора теплофизических и геометрических характеристик ТЗП. Такое снижение может составить до 40% при ламинарном режиме обтекания и до 11% при турбулентном режиме на боковой поверхности.

На основе полученных критериальных зависимостей предложены способы определения максимальных температур тела с учётом упрощённых подходов, что позволяет проводить быструю инженерную оценку температурных условий во всём диапазоне времени движения.

Математическая модель проницаемости углеродного нанополотна

Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Уколов А.В., Лебедев А.В.

Томский государственный университет

Нанонити являются конструктивным элементом во многих новых материалах. Производство нанонитей, равномерно ориентированных по любой произвольно выбранной оси кристалла, является важной проблемой в материаловедении. В статье [1] представлено обобщенное решение этой проблемы, а в [2] авторами был предложен экономически выгодный способ получения пористых нанонитей на основе кремния методом химического травления. Материал, сконструированный на основе таких нитей, обеспечивает хорошую проницаемость, как для ионов лития, так и для электронов.

В настоящей работе проведено конструирование нанонити пересекающимися сферическими частицами, после чего выполнены построения, определяющие ячеистую структуру плоского полотна. Представленная в работе математическая модель является классической моделью динамики молекул в потенциальных полях сферических частиц. Для полотна, выполненного из алмазных нанонитей диаметром 0,7 нм, установлено, что не происходит накопления газовых компонент в потенциальных ямах структуры. Таким образом, рассматриваемая идеальная углеродная структура является «чистой». Это позволяет надеяться, что режим фильтрации газовых компонент будет кинетическим, а не диффузионным. В этом случае сетка из алмазных нитей может выполнять функцию основного разделительного слоя нанопористой мембраны. Систематическими расчетами показано, что относительная проницаемость той или иной компоненты, есть доля площади окна проницаемости в общей площади ячейки полотна.

Список литературы

1. Tao Y., Degen C.L. Growth of magnetic nanowires along freely selectable crystal directions. *Nature Communications*, 2018. 9(339). DOI: 10.1038/s41467-017-02519-8
2. Chen Yu, Lui L., Xiong J., Yang T., Qin Y., Yan C. Porous Si nanowires from Cheap Metallurgical Silicon Stabilized by a Surface Oxide Layer for Lithium Ion Batteries. *WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA*, 2015. 25. pp. 6701–6709. DOI: 10.1002/adfm.201503206